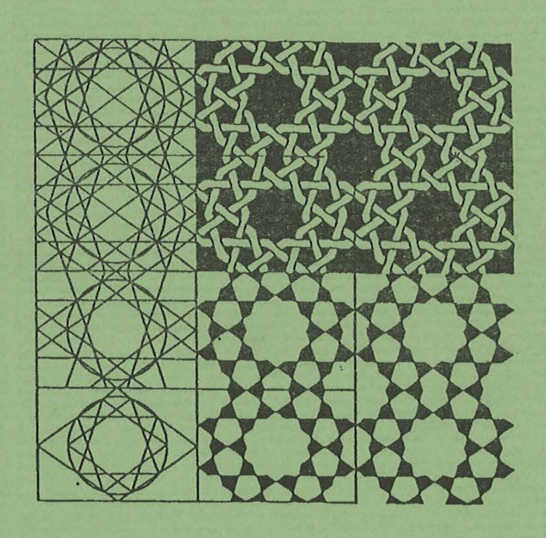
GEOMETRÍA Y ARQUITECTURA (II)
SIMETRÍA

por

Mª Agripina Sanz García
Ascensión Moratalla de la Hoz



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

GEOMETRÍA Y ARQUITECTURA (II)
SIMETRÍA

por

Mª Agripina Sanz García
Ascensión Moratalla de la Hoz

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

Geometría y arquitectura (II). Simetría.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
CUADERNO 40.01
ISBN: 84-89977-59-3
Depósito Legal: M-3112-1999

La creciente popularidad de puzzles y juegos, basados en el intercambio de formas y posiciones, ilustra la atracción que las formas geométricas y sus relaciones ejercen sobre la mayoría de la gente. Pero es curioso que, casi todos los aspectos geométricos más interesantes para el hombre de la calle, se ignoran en los planes de estudio. Incluso en la enseñanza superior, la esencia de la Geometría -su atractivo visual- se ha perdido completamente entre abstracciones y tecnicismos. Este olvido también se detecta en otras ramas de las Matemáticas (Topología, Análisis, Teoría de la medida...) a pesar de que muchas de sus ideas básicas deban su origen a la intuición geométrica. La investigación en estos campos se enriquecería si tuviera presente algunos conocimientos geométricos.

El origen de la Geometría debe situarse en el principio de la civilización: tan pronto como el hombre toma conciencia del espacio, crea formas y motivos que muestran la belleza. Cuando empieza a construir, hace uso de piedras y otros materiales para cubrir los suelos, paredes y techos de sus casas y elige formas y colores con el fin de lograr un entorno agradable. Se puede decir que este es el punto de partida del arte de recubrir con mosaicos y azulejos.

El *arte* de diseñar frisos y mosaicos es muy antiguo y está muy bien desarrollado. Por contraste, la *ciencia* de estos diseños -el estudio de sus propiedades matemáticas- es relativamente reciente y muchos de sus aspectos están aún sin explorar.

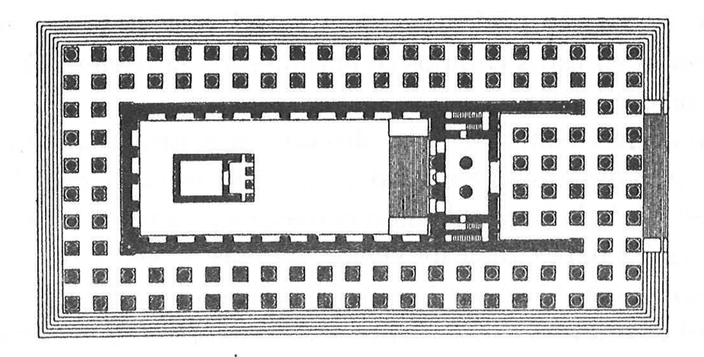
Con este Cuaderno de Apoyo para alumnos de Geometría en la Escuela de Arquitectura, pretendemos que el "encanto" visual de elementos geométricos les estimule al estudio y a la investigación en este campo.

Por ello, dedicamos este Cuaderno a nuestros alumnos.

1 *Simetría y arquitectura.*

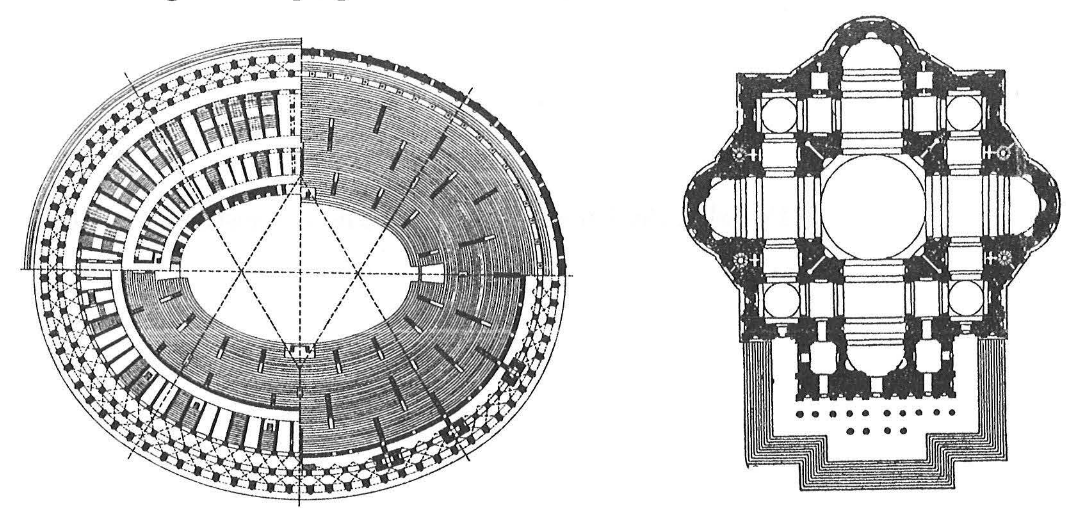
"La Simetría es una idea por medio de la cual, el hombre de todas las épocas ha tratado de comprender y crear la belleza, el orden y la perfección" (Weyl).

Las primeras concepciones sobre simetría arquitectónica identificaban simetría con la proporción, el equilibrio y la belleza.



Templo de Apolo Didimeo en Mileto (335-320 a.d.C.)

Vitruvio la define como "el vínculo armónico de cada uno de los miembros del edificio respecto a la figura global de la obra". Esta concepción influyó notablemente en el Renacimiento: Durero, Miguel Angel, Piero de la Francesca, Paccioli, Leonardo da Vinci...contribuyeron al estudio de la simetría sin desligarla del proporcionado de la obra.



Izda: Planta del Coliseo de Roma (70-82 d.d.C.)
Dcha: Planta de San Pedro en el Vaticano, Miguel Angel (1546)

La referencia de Palladio[1]:

> "entiendo que los edificios deben parecer un entero y bien definido cuerpo en el que un miembro convenga al otro y todos los miembros sean necesarios a aquel que se quiere hacer",

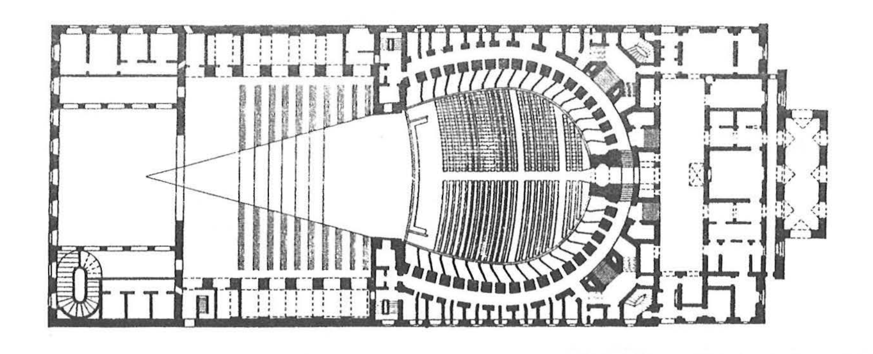
sintetiza perfectamente esta vinculación arquitectónica de simetría y proporción en su aspecto global. Esta búsqueda constante del canon y el orden se reflejó no sólo en los diseños de plantas y fachadas sino en todos los elementos integrantes del edificio: frisos, columnatas, mosaicos,...

Sigue Palladio

> "y se debe advertir que las estancias de la parte derecha respondan y sean iguales a las de la izquierda a fin de que la fábrica sea así en una parte como en la otra."

En Viollet le Duc[2] encontramos una nueva conceptualización:

> "simetría significa hoy, en el lenguaje de los arquitectos, no un equilibrio ni relación armoniosa de las partes con el todo, sino una similitud de partes opuestas, la reproducción exacta a la izquierda de un eje, de lo que hay a la derecha".



Planta del Teatro en la Scala de Milán, Piermarini (1774)

En el fondo, esta definición desmarca la teoría de la proporción de la teoría de la simetría, reduciendo ésta a su aspecto euclídeo puramente geométrico. En este sentido, la TEORIA DE LA SIMETRIA es una parte de la geometría que, operando sobre el espacio euclídeo, engloba como transformaciones a todas las isometrías, siendo su interés específico el estudio de los grupos de isometrías que dejan invariantes las figuras.

[1] *I quattro libri dell'architettura*

[2] *Diccionario de Arquitectura*

2 *Movimientos del plano.*

Consideramos el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^2$. Un *movimiento* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación afín que se caracteriza por conservar la distancia, es decir,

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$$

para todo $P, Q \in \mathbb{R}^2$, siendo d la distancia euclídea: $d(P,Q) = \left\| \overrightarrow{PQ} \right\|$.

Los movimientos en el plano afín reciben también el nombre de *isometrías*; la palabra isometría proviene del griego y significa "igual medida".

Recordemos que las traslaciones, los giros y las simetrías son movimientos en el plano, y cualquier otro movimiento que se realice es composición de ellos.

TRASLACION

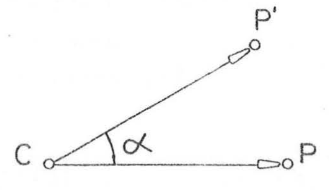
$T_u\ (P) = u + P$

$P' = T_u\ (P)$

P u P'

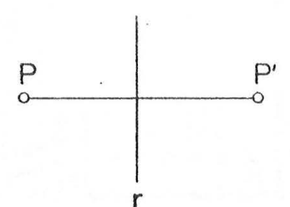
GIRO

$P' = G_C^{\alpha}\ (P)$



SIMETRIA AXIAL

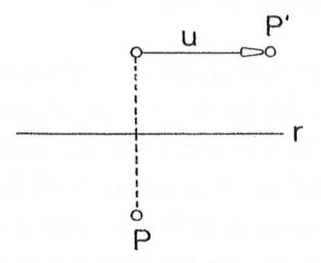
$P' = S_r\ (P)$



SIMETRIA CON DESLIZAMIENTO

$P' = L\ (P)$

$L\ (P) = T_u \circ S_r\ (P)$



Descripción de los movimientos en el plano.

Todo movimiento en un plano es o bien la identidad o una traslación o una rotación (movimientos *directos*, que no cambian la orientación del

objeto después de aplicarle el movimiento), o bien una simetría o una simetría deslizante (movimientos *indirectos,* que cambian la orientación).

El conjunto de los movimientos del plano $GM(\mathbb{R}^2)$ tiene estructura de Grupo con la composición de aplicaciones.

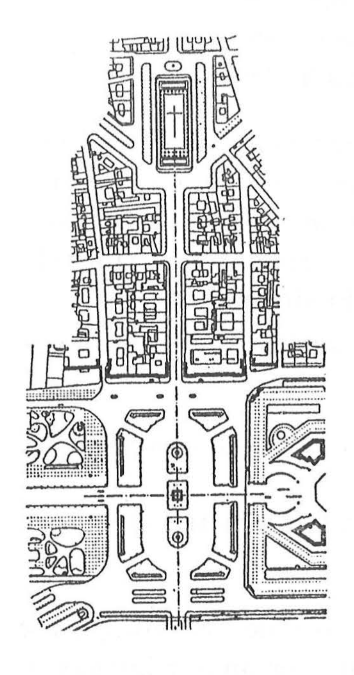
La transformación identidad es el elemento neutro de este grupo. Es el movimiento que deja invariantes todos los puntos del plano.

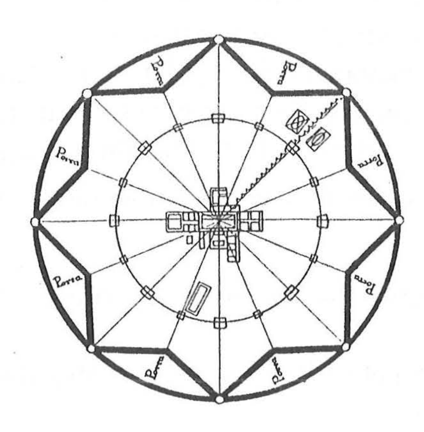
$$Id(P) = P.$$

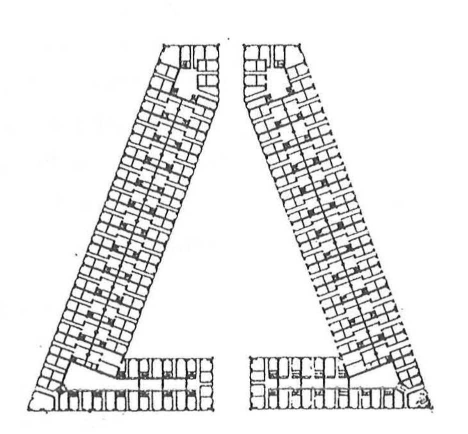
Todo movimiento tiene movimiento inverso. El movimiento inverso del giro $G_{C,\alpha}$ es el giro $G_{C,-\alpha}$, ya que la composición de ambos nos da la identidad. En el caso de una simetría S_r, es ella misma. Por último, el movimiento inverso de una traslación $T_{\vec{a}}$ es la traslación $T_{-\vec{a}}$.

$$(G_{C,-\alpha}\, o G_{C,\alpha})(P) = Id(P) = P$$
$$(S_r o S_r)(P) = Id(P) = P$$
$$(T_{-\vec{a}} o T_{\vec{a}})(P) = Id(P) = P$$

Isometrías en la organización de ciudades

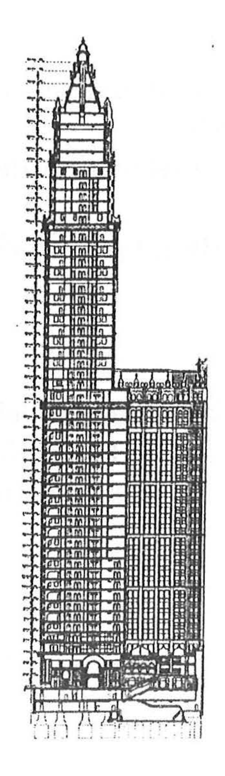


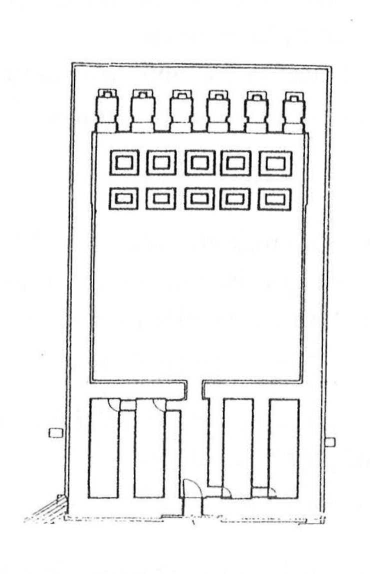


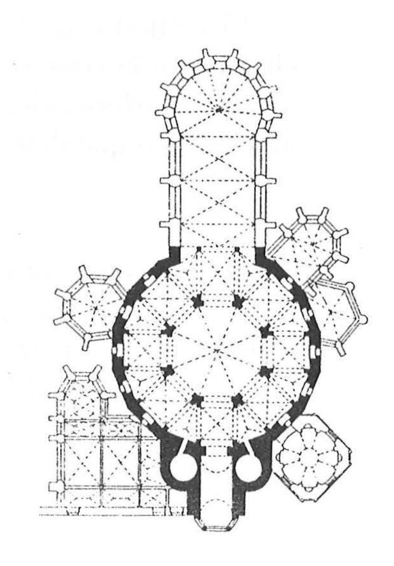


Izda: Place de la Concorde, París
Centro: Planta de Sforzinda, Filarete (hacia 1465)
Dcha: Planta de Place Dauphine, París (1607)

Isometrías en el diseño de edificios







Izda: Sección del Woolworth Building, Gilbert (1911)
Centro: Planta del Templo del Faraón Snefru, Dahshur
Dcha: Planta de la Capilla Palatina de Aquisgrán (796-804)

En el estudio de los movimientos del plano (o isometrías) es interesante considerar un tipo especial de puntos, *los puntos fijos*. Un punto P es un punto fijo de una isometría f si $f(P) = P$. En los movimientos descritos anteriormente, los puntos fijos del giro se reducen al centro. En la simetría son fijos los puntos del eje, y la traslación no deja fijo ningún punto.

En función de estos puntos fijos podemos clasificar las isometrías como sigue:

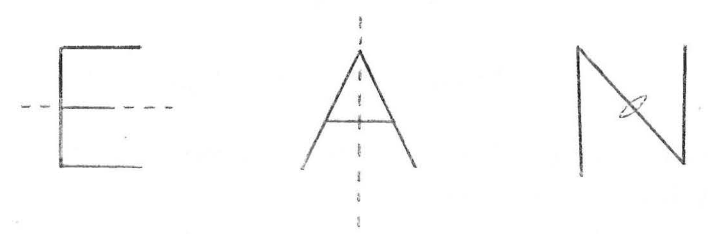
> "Toda isometría con un punto fijo es una rotación o una simetría axial"
>
> "Toda isometría indirecta sin puntos fijos es una simetría con deslizamiento"

Conviene distinguir estos subespacios de puntos fijos de los subespacios afines invariantes. Un subespacio afín M es invariante por un movimiento f si $f(M) = M$, es decir, el conjunto se transforma globalmente en sí mismo, aunque no tenga puntos fijos. Por ejemplo, una traslación de vector $\vec{u}$ deja invariante cualquier recta paralela al vector $\vec{u}$, pero ningún punto de la recta permanece fijo.

3 *Grupo de simetría de una figura plana.*

Entendemos por figura plana cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Una figura plana F puede ser estudiada "estáticamente", analizando sus propiedades métricas, o bien "dinámicamente", analizando bajo qué isometrías permanece invariante.

Observando las letras E y A encontramos inmediatamente su simetría bilateral; en el primer caso el eje de simetría (reflexión) es horizontal y en el segundo caso, vertical. La letra N es simétrica por un giro de amplitud π.

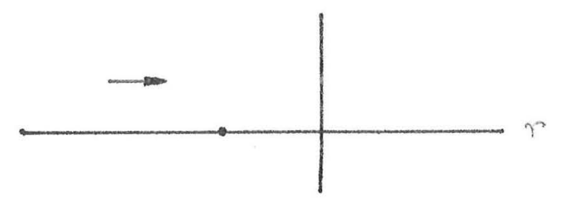


Consideramos todos los movimientos que transforman la figura en sí misma, $G_F = \{f \in GM(\mathbb{R}^2) \mid f(F) = F\}$. Pues bien, G_F con la composición de aplicaciones tiene estructura de grupo que llamaremos *grupo de simetría de la figura F*. Si la figura es completamente irregular, su grupo de simetría consiste solamente en la identidad.

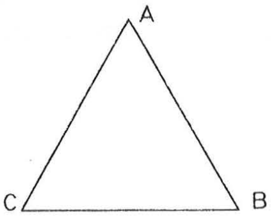
Veamos algunos ejemplos:

1) Tomemos la recta r.

Esta recta r es invariante por todas las traslaciones de vector paralelo a r, por todas las simetrías con eje ortogonal a r y por todos los giros de 180^o con centro en un punto de r. Estos movimientos generan G_r.

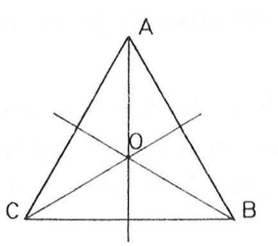


2) Sea un triángulo equilátero F de vértices ABC y centro de gravedad O.



G_F, grupo de simetría del triángulo, está formado por los siguientes mo-

vimientos: Los giros de centro O y amplitud 120^o y 240^o, las simetrías de ejes OA, OB y OC y la identidad Id que coincide con el giro de centro O amplitud 360^o.

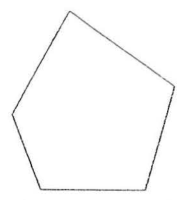
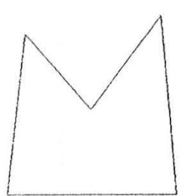
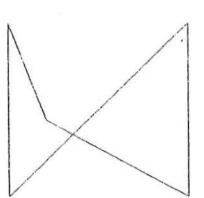


$$G_F = \{Id, G_{120^o}, G_{240^o}, S_{OA}, S_{OB}, S_{OC}\}$$

la composición de estos movimientos da lugar a la siguiente tabla, que muestra su estructura de grupo.

o	Id	G_{120^o}	G_{240^o}	S_{OA}	S_{OB}	S_{OC}
Id	Id	G_{120^o}	G_{240^o}	S_{OA}	S_{OB}	S_{OC}
G_{120^o}	G_{120^o}	G_{240^o}	Id	S_{OB}	S_{OC}	S_{OA}
G_{240^o}	G_{240^o}	Id	G_{120^o}	S_{OC}	S_{OA}	S_{OB}
S_{OA}	S_{OA}	S_{OC}	S_{OB}	Id	G_{240^o}	G_{120^o}
S_{OB}	S_{OB}	S_{OA}	S_{OC}	G_{120^o}	Id	G_{240^o}
S_{OC}	S_{OC}	S_{OB}	S_{OA}	G_{240^o}	G_{120^o}	Id

3) Analizando las siguientes figuras observamos que el único movimiento que las deja invariante es la identidad.

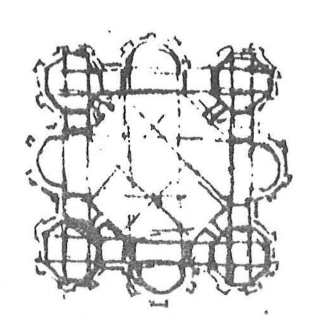
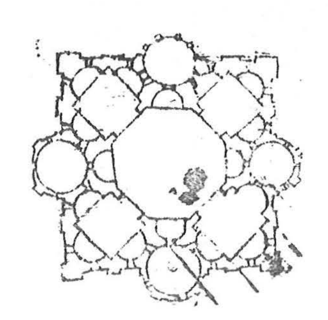
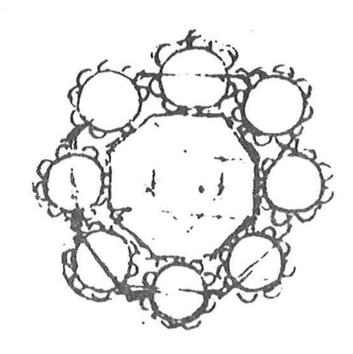
Estas figuras, bien distintas entre sí, tienen el mismo grupo de simetría $G_F = \{Id\}$. Concluimos que G_F no caracteriza unívocamente a la figura F.

3.1 *Grupos de simetría de Leonardo.*

Estos grupos tuvieron gran interés en el Renacimiento para diseñar plantas de capillas adyacentes a un núcleo central sin romper la simetría central de ese núcleo. Leonardo hizo un estudio sistemático con vistas a establecer los métodos óptimos para realizarlo.

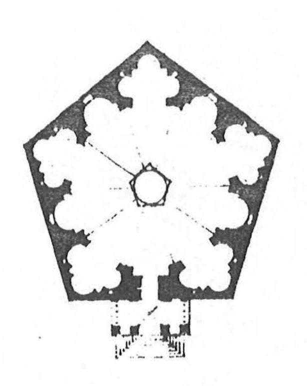
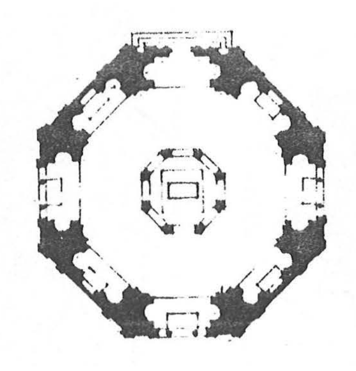
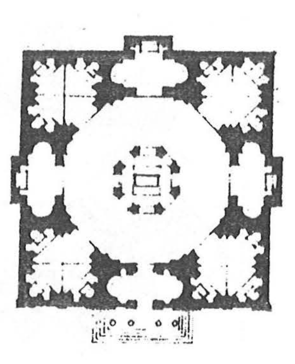
Un grupo de simetría L_F de una figura plana F se llama *grupo puntual o de Leonardo* si es un grupo finito y existe un punto P de F que es fijo para todos los elementos de L_F.

Así lo muestran los siguientes diseños de capillas:

Estudio de iglesias de planta central, Leonardo da Vinci.

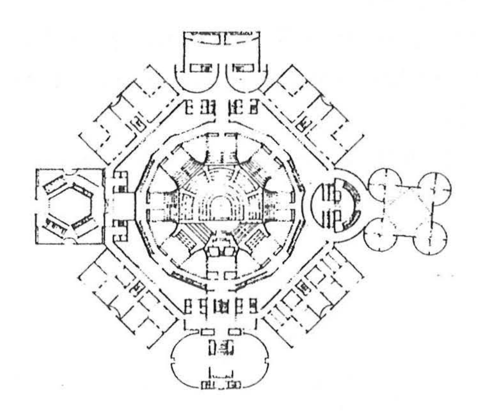
Un diseño donde se hace más evidente la organización central son estos estudios de Sebastiao Serlio en los que utiliza polígonos regulares.

Plantas centralizadas, Sebastiao Serlio, (1547)

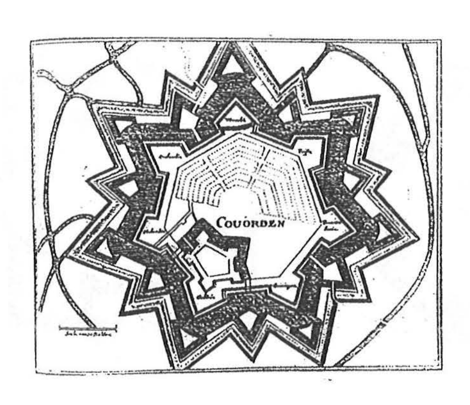
Arquitectónicamente, en tiempos recientes, el uso de estos grupos se ha visto enriquecido con una nueva idea: la existencia de un punto central de simetría en la planta permite localizar en el centro todos los servicios comunes e instalaciones de interés general (escaleras, ascensores, conducciones

eléctricas, de agua, luz, patios...). Esta centralización geométrica aporta un notable ahorro económico, y sobre todo, un encubrimiento natural de esas instalaciones..

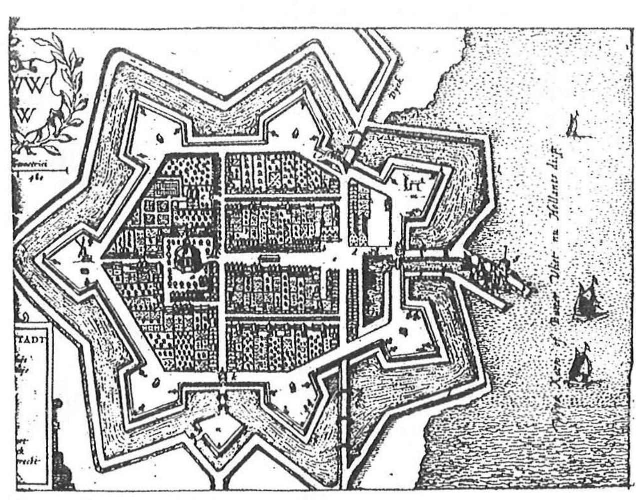


Edificio Congresos, Bangladesh, L.Kahn, (1962)

Desde el punto de vista de la arquitectura generativa, estos grupos de Leonardo tienen el máximo interés. Por ejemplo, una distribución poligonal con edificios en los vértices o en las aristas, permite generar en el centro un espacio común susceptible de contener una plaza o zona ajardinada o un edificio de uso comunitario

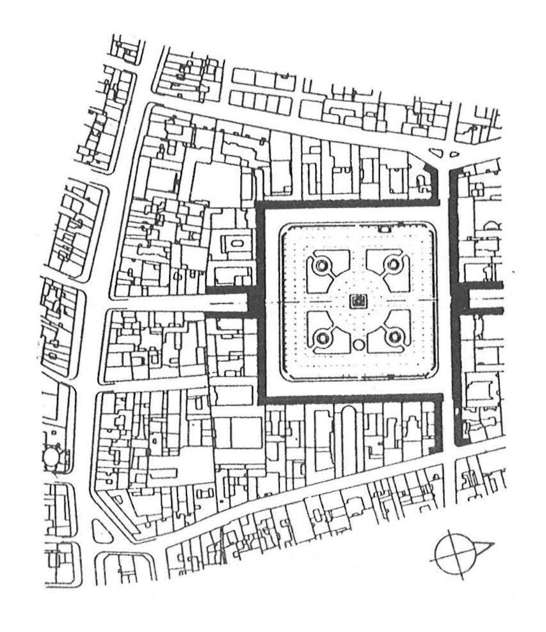


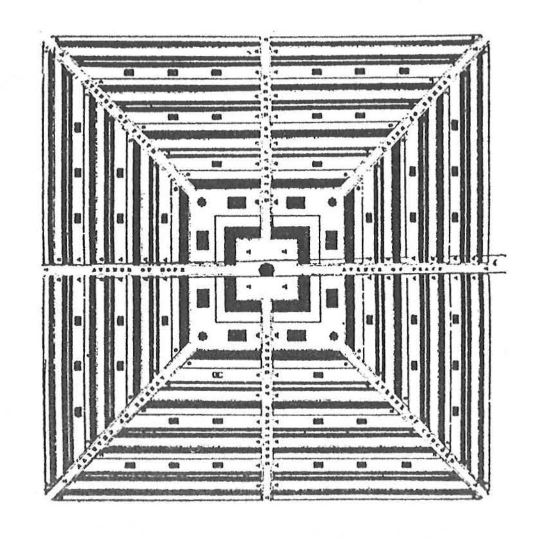
Plano de Coerworden (1659)



Plano de Willemstad (1632)

Ejemplos de distribución poligonal





Izda: Planta de Victoria (1849)
Dcha: Place des Vosgues, París (1610)

Puesto que los grupos de Leonardo se caracterizan por dejar un punto fijo, vamos a hacer un estudio de aquellas isometrías que cumplen esta propiedad.

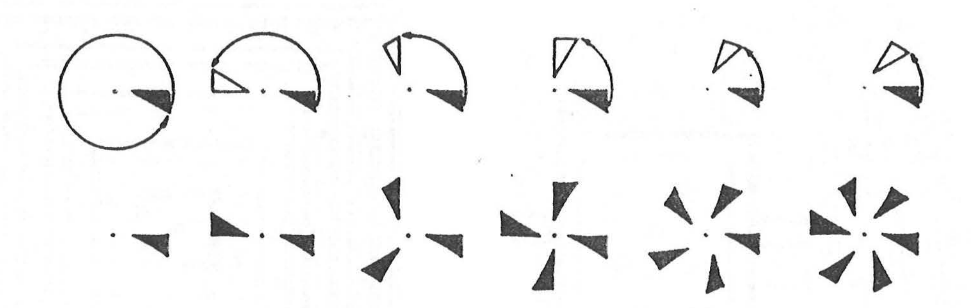
En primer lugar, si L_F es un grupo con un punto fijo P estamos seguros de que en L_F no hay traslaciones. Entonces L_F sólo podrá contener giros con centro P y simetrías axiales con ejes que pasan por P.

- Si el giro de centro P y ángulo α está en L_F, también deberán estar todos los giros de centro P y ángulo $k\alpha$. Por ser grupo finito, llegará un momento para $k = n$, que $n\alpha = 2\pi$. Entonces α valdrá $\frac{2\pi}{n}$. Si una de las isometrías de L_F es un giro, éste será de ángulo $\frac{2\pi}{n}$, y L_F contendrá también a los n giros que se obtienen por composición reiterada de $G_P^{\frac{2\pi}{n}}$:

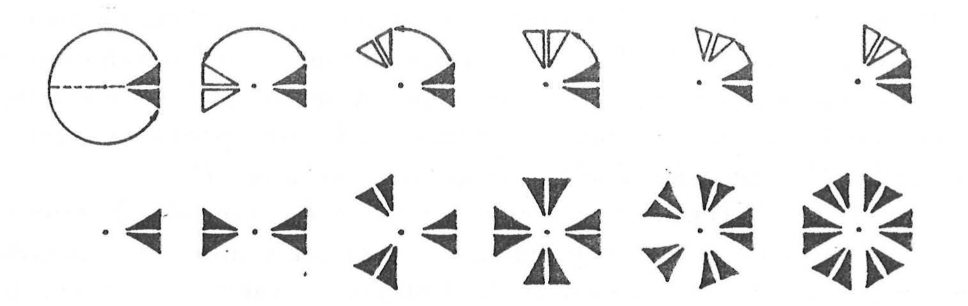
$$G_P^{\frac{2\pi}{n}}, G_P^{\frac{2\pi}{n}2}, G_P^{\frac{2\pi}{n}3}, ...G_P^{\frac{2\pi}{n}(n-1)}, G_P^{\frac{2\pi}{n}n} = G_P^{2\pi} = Id.$$

A este grupo, que designaremos por C_n, le llamaremos *Grupo cíclico* generado por $G_P^{\frac{2\pi}{n}}$, y diremos que tiene *orden n*.

Partiendo de un motivo y aplicándole las isometrías de un grupo cíclico,C_k, obtenemos una figura cuyo grupo de simetría de Leonardo es precisamente C_k.



- Si L_F contiene una simetría axial S_r, respecto a una recta r, tal que P pertenece a r, en este grupo deberán estar, al menos, S_r y la identidad. Si otra de las isometrías de L_F es la simetría $S_{r'}$ con $r \neq r'$ y $P \in r'$, la composición $S_r o S_{r'} = S_{r'} o S_r = G_P^{\beta}$ estará en el grupo, siendo β el doble del ángulo formado por r y r'. Por lo anterior, β es $\frac{2\pi}{n}$ para $n > 1$. Entonces todos los elementos del grupo cíclico C_n más todas las n simetrías axiales obtenidas al girar la recta r según los ángulos $\frac{2\pi}{n}k$, para $k = 1, 2, ...n$, pertenecen a L_F. A este grupo le llamaremos D_n *grupo diedral*.



Según Weyl, se debe a Leonardo el descubrimiento de que los únicos grupos finitos de isometrías en el plano son los C_n y los D_n. Los grupos predominantes en arquitectura han sido principalmente D_1 y D_2. En las pirámides de Egipto se exhibe el grupo D_4, en el edificio del Pentágono de Washington el D_5...

Teorema de Leonardo.

Los únicos grupos puntuales de simetría son los grupos cíclicos C_n o los grupos diedrales D_n, para $n = 1, 2, ...$ siendo

$$C_n = \{G_P^{\frac{2\pi}{n}k}, k = 1, 2, ...n\}, \textit{generado por el giro de centro } P \textit{ y ángulo} \frac{2\pi}{n}\}$$

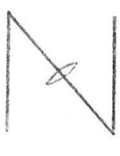
$$D_n = \{G_P^{\frac{2\pi}{n}k}, S_{r_k}, k = 1, 2, ...n\}, \textit{compuesto de } n \textit{ giros y } n \textit{ simetrías axiales}\}$$

Para la letra E, el grupo diedral generado por una sola reflexión es

$$D_1 = \{S_{r_1}, Id\}$$

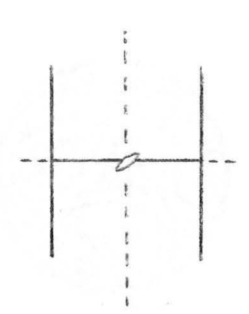
Para la letra A es el mismo D_1.





El grupo de simetría de la letra N está generado por un giro de 180^0.

$$C_2 = \{G_P^{\pi}, G_P^{2\pi}\} = \{G_P^{\pi}, Id\}.$$

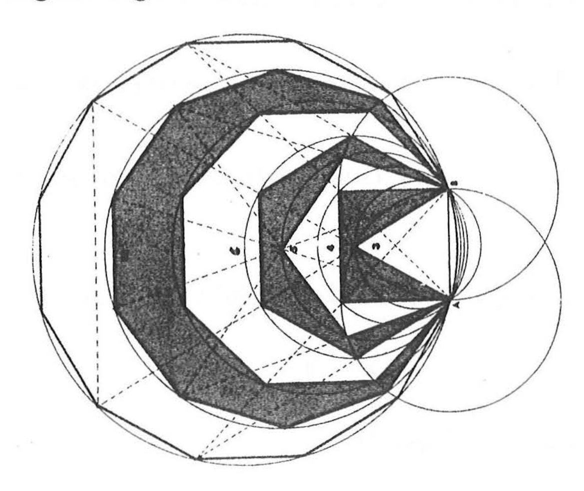


Y el de la letra H es D_2, el grupo diedral que generan dos reflexiones S_{r_1} y S_{r_2},

$$D_2 = \{G_P^{\pi}, G_P^{2\pi}, S_{r_1}, S_{r_2}\}$$

Concluimos esta sección con un resultado de interés geométrico:

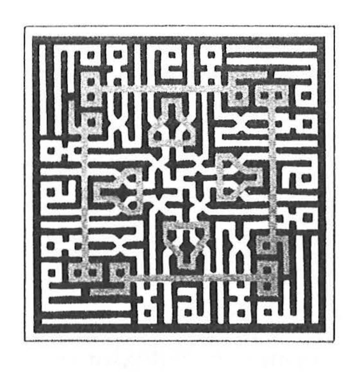
"Para todo $n \geq 3$, el grupo diedral de n es exactamente el grupo de simetría del polígono regular de n lados".



Generación de los polígonos de 3, 4, 5, 6, 8, 10 y 12 lados.

3.2 *Actividades*

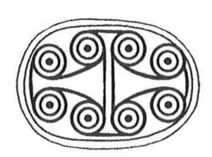
Estudiar el grupo de simetría de Leonardo de las siguientes figuras. La primera de ellas es un azulejo vidriado con una inscripción, que se repite sobre cada uno de los lados del cuadrado, que reza así: "Alá, no hay otro Dios que Él".

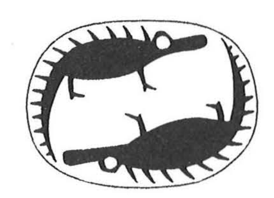






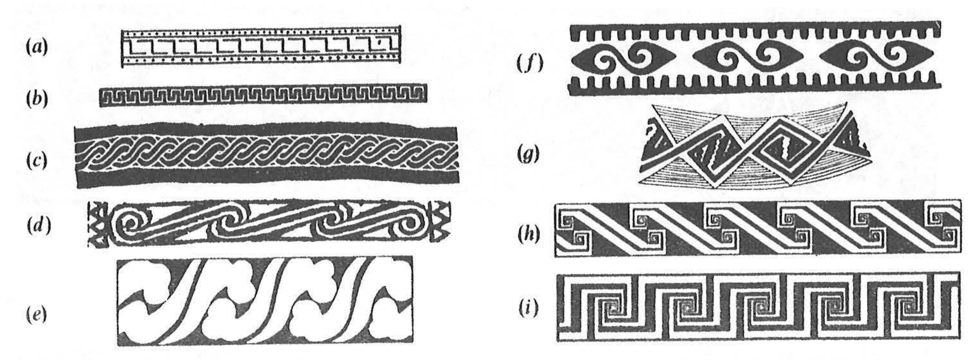






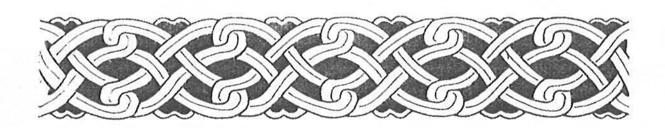
3.3 *Grupos de simetría de los frisos.*

Los frisos, elementos sustanciales de la ornamentación clásica, constan de un determinado módulo, figura o motivo que se repite a lo largo de una banda rectangular, dándose siempre una periodicidad sistemática en la repetición del módulo, que es la base del ritmo que el friso comunica. Sorprende que motivos similares aparezcan en lugares y tiempos muy diferentes y distantes.

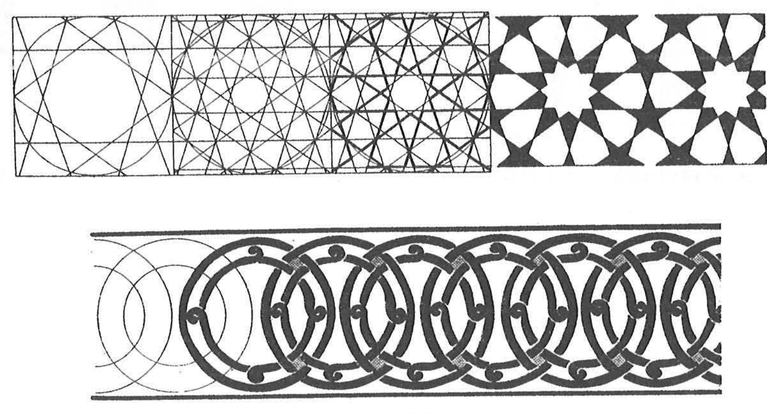


a) Grecia b) Túnez c) Egipto d) Nueva Guinea e) Japón f) México g) Arizona h) e i) actuales

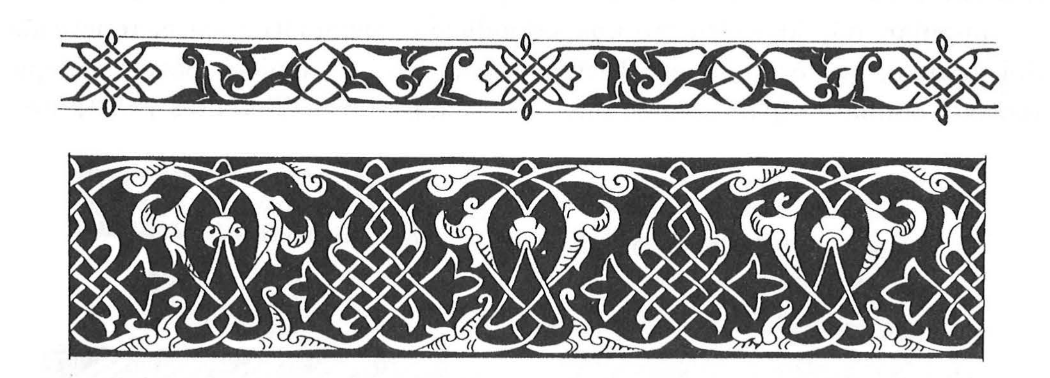
En el diseño del friso existen dos grados de libertad: la elección del motivo y la elección de las transformaciones que aplicadas al motivo inicial permiten llenar la banda horizontal que contiene al friso.



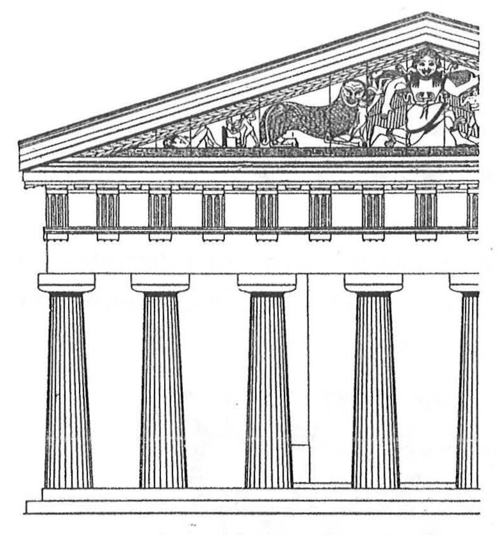
Estas transformaciones se limitan a una gama de siete tipos distintos de frisos. Esta limitación, lejos de frenar las posibilidades creativas, muestra la esencia geométrica que se esconde detrás de esos diseños.



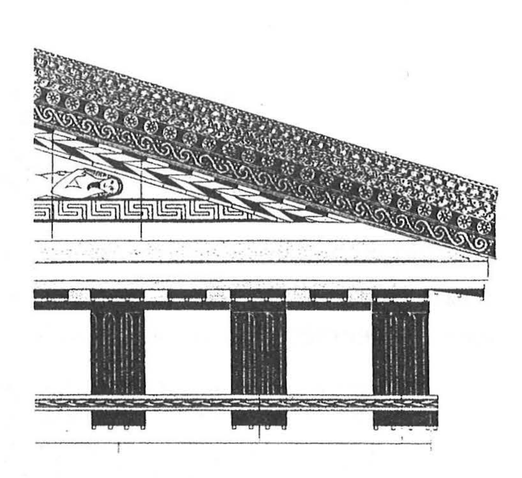
Aparecen a lo largo de toda la historia, siendo notables por su riqueza ornamental los frisos árabes.



En el templo griego es donde el friso adquiere notoriedad constructiva: como banda que limita el acabamiento de los muros o las columnas sobre el arquitrabe, marcando la cornisa. Con ello comienza a desempeñar el doble papel de elemento arquitectónico construido y espacio susceptible de ornamentación.

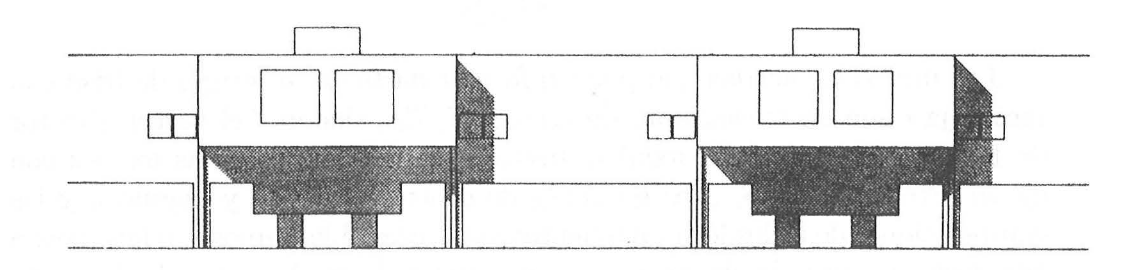


Templo de Artemides, Corfú.



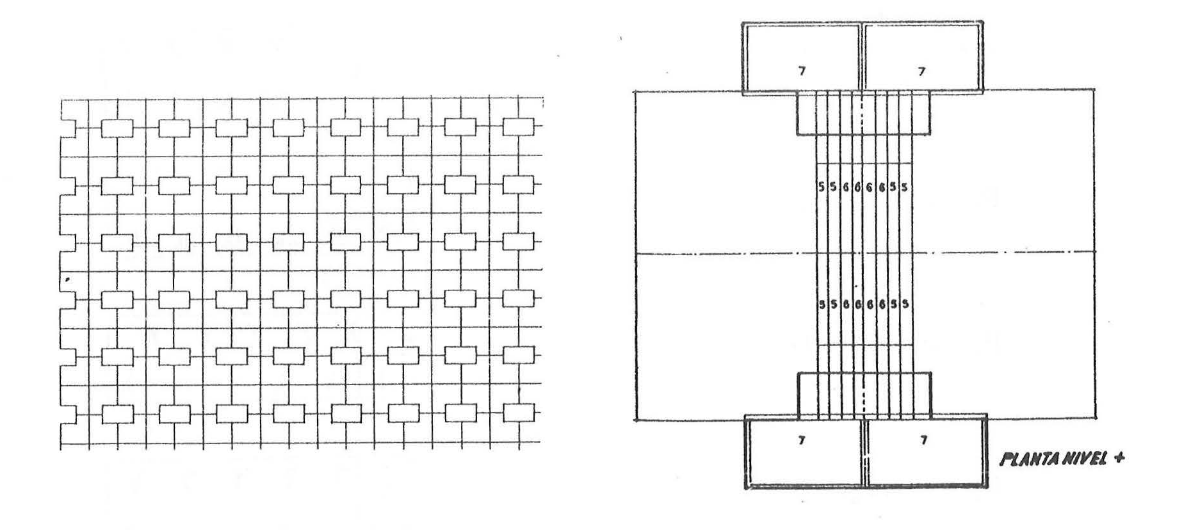
Decoración en terracota.

Actualmente surge el friso de edificaciones enlazadas. Con ello, el clásico motivo geométrico que se repite a lo largo de una banda, se sustituye por la planta de un edificio, capaz de generar, por traslación horizontal, edificios en hilera.



Alejandro de la Sota

A nivel conceptual, esta idea de frisos edificados lleva directamente al problema de la coordinación modular.



Elemento de cuatro viviendas y conjunto residencial, Alejandro de la Sota.

Pasemos ahora a hacer un estudio geométrico del friso:

Sea una recta r con vector director $\vec{a}$. *Un grupo de simetría de un friso* es cualquier grupo de isometrías del plano que deje fija r y que contenga como únicas traslaciones al grupo generado por la traslación $T_{\vec{a}}$, es decir:

$$S_F = \{f/\ f \in GM(\mathbb{R}^2) \text{ y } f(r) = r\}$$
$$S_F \supset \{T_{n\vec{a}}\}_{n \in Z}$$

Las únicas isometrías que pueden formar parte de un grupo de friso con recta fija r son las traslaciones de vector $n\vec{a}$, $T_{n\vec{a}}$, siendo $\vec{a}$ el vector director de la recta r, la simetría axial respecto de r, S_r, las simetrías axiales con eje m ortogonal a r, S_m, los giros G_A de centro en $A \in r$ y ángulo π y las composiciones de todos los movimientos anteriores. Llamamos L a la simetría con deslizamiento, de eje de simetría r y vector de traslación en la dirección de r.

Teorema

Existen sólo siete grupos de frisos cuyos generadores son:

$F_1 = <T_a>$

$F_1^1 = <T_a, S_r>$

$F_1^2 = <T_a, S_m>$

$F_1^3 = <T_a, L>$

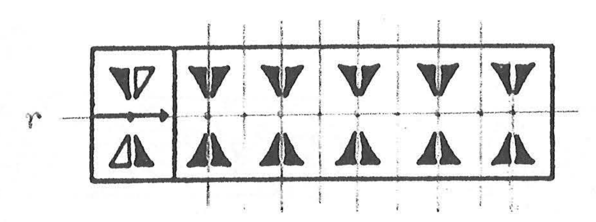
$F_2 = <T_a, G_A>$

$F_2^1 = <T_a, G_A, S_r>$

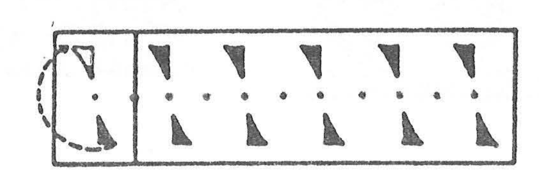
$F_2^2 = <G_A, L>$

En el teorema anterior hemos indicado únicamente las isometrías que generan el grupo, a partir de las cuales por composición, obtenemos todas las isometrías que aparecen en el friso.

Por ejemplo, en el caso F_2 existen giros de amplitud π con centro en los puntos de la recta r que se indican en la siguiente figura



En el grupo de simetría F_2^1 la composición de las isometrías generadoras dan lugar a simetrías de ejes perpendiculares a r tal y como se señala, a continuación, en el esquema



también podemos encontrar una simetría con deslizamiento que se obtiene por composición de $T_{n\vec{a}} o S_r$.

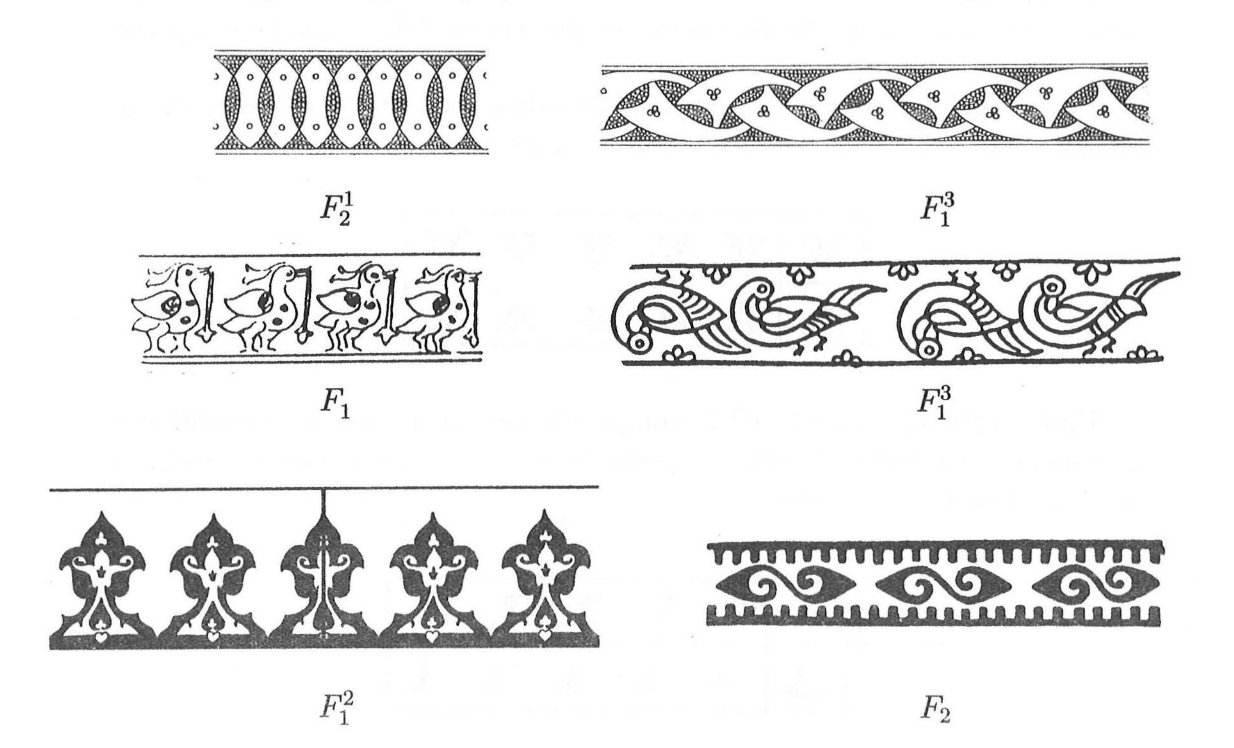
3.4 *Actividades.*

1. Verificar geométricamente las siguientes propiedades:

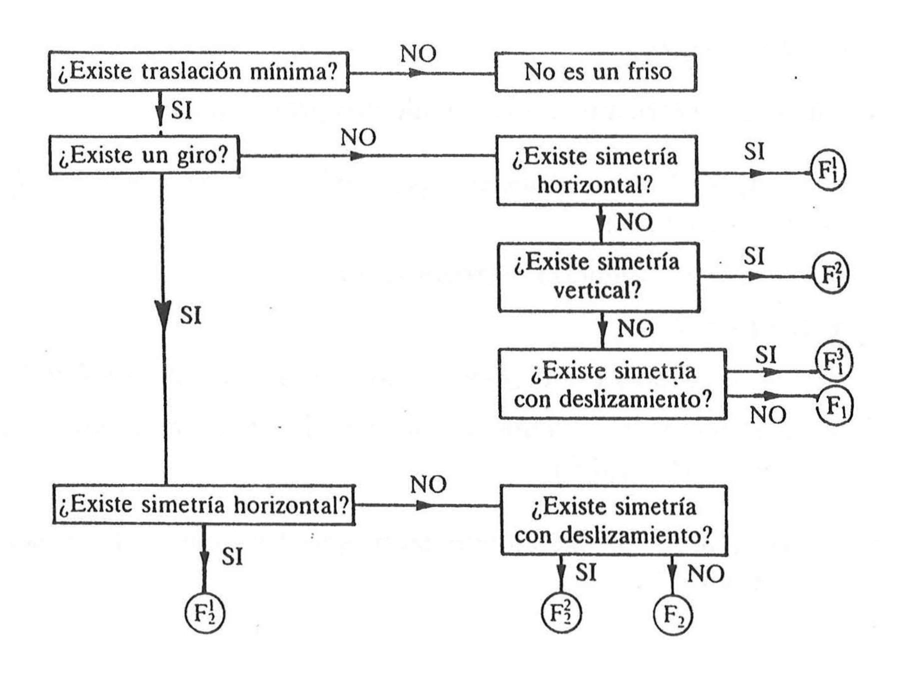
   - Si $A, B, C \in r$, entonces $G_A o G_B o G_C = G_C o G_B o G_A = G_D$ para un cierto $D \in r$.
   - $L = S_{r'} o G_A$ siendo r' ortogonal a r.
   - $S_r o T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}} o S_r$.
   - Si $A \in r, T_{\vec{a}} o G_A = G_M$ siendo M el punto medio de A y $T(A)$.
   - $T_{\vec{a}}\ o\ S_{r'} = S_{r''}$ siendo r'' ortogonal a r en el punto medio de $P = r \cap r'$ y $T_{\vec{a}}(P)$.

2. Se propone al lector que elabore su propio friso, eligiendo el motivo, la traslación y el tipo.

3. Comprobar que el grupo de simetría de cada friso es el que se indica

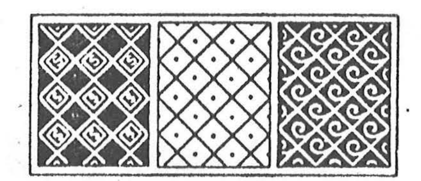
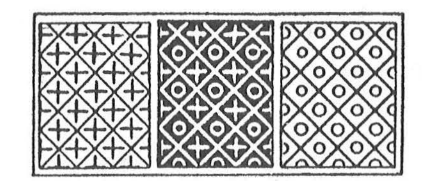


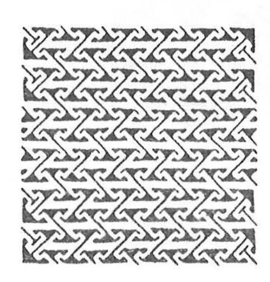
Incluimos el algoritmo de Rose y Stafford para facilitar la clasificación de los frisos



3.5 *Grupos de simetría del plano.*

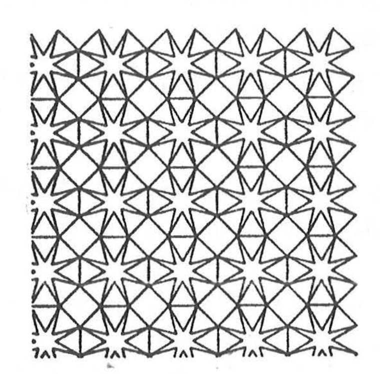
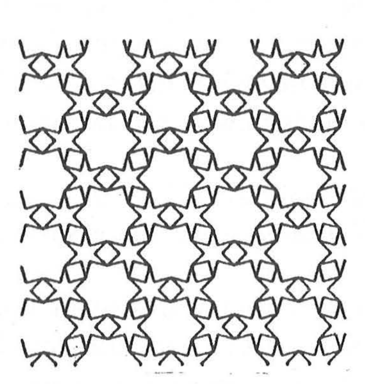
El recubrimiento del plano es una cuestión que ha suscitado gran interés en todos los tiempos. Esta inquietud, que ha dado lugar a diseños de gran belleza, ha surgido de problemas tan cotidianos como levantar muros, decorar paredes, pavimentar suelos, estampar tejidos...



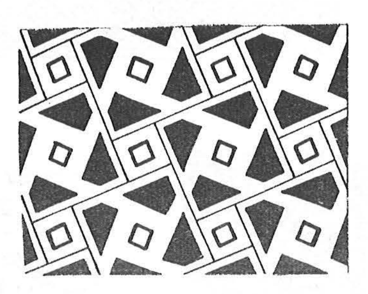


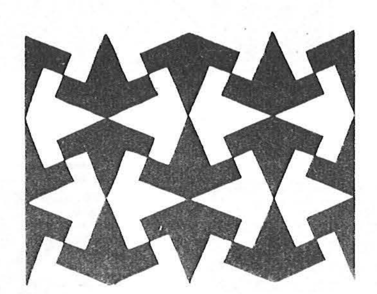
En todos los casos se observa que, a partir de una determinada figura, aplicando diversas isometrías, se genera un motivo que, por repetición, es susceptible de cubrir el plano.

El estudio matemático de este problema se conoce con el nombre de grupo de simetría del plano.

Aunque los artistas árabes tenían un conocimiento geométrico de los distintos grupos de simetría del plano, hasta el siglo XIX no se obtuvieron resultados matemáticos importantes. A raíz de la aparición de los rayos X se observó que estos grupos corresponden a la estructura de los cristales. Tras un estudio sistemático, el cristalógrafo Fedorov demostró en 1891 que existen únicamente 17. En 1869 Jordan había descrito 16 de los grupos y en 1874, Sohncke reconoció el que faltaba, olvidando sin embargo tres de los que Jordan ya había indicado. En nuestro siglo fueron redescubiertos por Polya y Niggli (1924).





Un grupo G de isometrías del plano se dice *grupo de simetría del plano* si:

- Existe una figura F compacta y conexa (limitada por una curva cerrada) que verifique:

1. $\mathbb{R}^2 = \cup g(F), g \in G$, es decir todo el plano queda cubierto por los desplazamientos de la figura F según las isometrías de G.

2. Si $g(int(F)) \cap h(int(F)) \neq \emptyset$, entonces $g(F) = h(F)$, $g, h \in G$, es decir F y sus imágenes se van acoplando sin solapamientos.

- El conjunto $\{T_{n\vec{u}} \; o \; T_{m\vec{v}}, \; n, m \in \mathbb{Z}\}$ necesariamente está contenido en G, siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^2$.

Estas traslaciones forman una red de paralelogramos en el plano, que llamaremos *malla fundamental*. Los vértices de la malla son los vértices de los paralelogramos que la componen: si P es un vértice de la malla, todos los puntos de la forma $P + n\vec{u} + m\vec{v}$, con $n, m \in \mathbb{Z}$, también lo son.

A continuación hacemos una descripción de los 17 grupos de simetría del plano, de acuerdo con la notación cristalográfica internacional. Esta notación utiliza las letras p, m, g para designar al grupo, en función del tipo de isometrías que lo componen. Así, si en dicho grupo existen giros de amplitud $\frac{2\pi}{n}$, el nombre contendrá las letras pn. La letra m (del inglés mirror) que aparece en la notación cristalográfica, hace referencia a las simetrías axiales o reflexiones del grupo. La letra g (glide) nos indica que existen simetrías con deslizamiento.

Para estudiar el grupo de simetría de un recubrimiento del plano, determinamos en primer lugar, el orden del grupo buscando el mínimo ángulo de rotación del diseño. Si este ángulo es $\frac{2\pi}{n}$, el orden del grupo es n (repitiendo n veces el giro obtenemos un giro completo de 360°) y el grupo contiene giros de amplitud $\frac{2\pi}{n}k, k = 1, ...n$.

A partir de 5 de estos grupos, describiremos el resto.

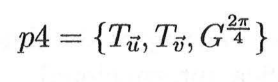
Teorema

Existen sólo 5 grupos de simetría del plano $p1, p2, p3, p4$ y $p6$ que contienen isometrías que conservan la orientación y cada uno está generado por las isometrías que aparecen entre llaves.

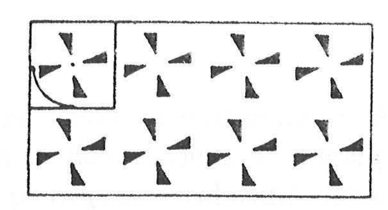
$p1 = \{T_{\vec{u}}, T_{\vec{v}}\}$

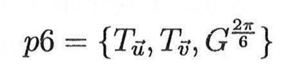
$p2 = \{T_{\vec{u}}, T_{\vec{v}}, G^{\frac{2\pi}{2}}\}$

$p3 = \{T_{\vec{u}}, T_{\vec{v}}, G^{\frac{2\pi}{3}}\}$

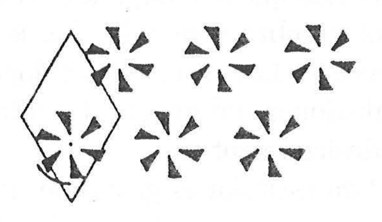


$p4 = \{T_{\vec{u}}, T_{\vec{v}}, G^{\frac{2\pi}{4}}\}$





$p6 = \{T_{\vec{u}}, T_{\vec{v}}, G^{\frac{2\pi}{6}}\}$



Los giros de los distintos grupos tiene sus centros en vértices de la malla fundamental.

En este teorema hemos indicado únicamente las isometrías que generan el grupo, a partir de las cuales por composición, obtenemos todas las isometrías que aparecen en el mosaico.Si consideramos la posibilidad de que el grupo de simetría del plano contenga también reflexiones y simetrías con deslizamiento, aparecen 12 nuevos grupos.

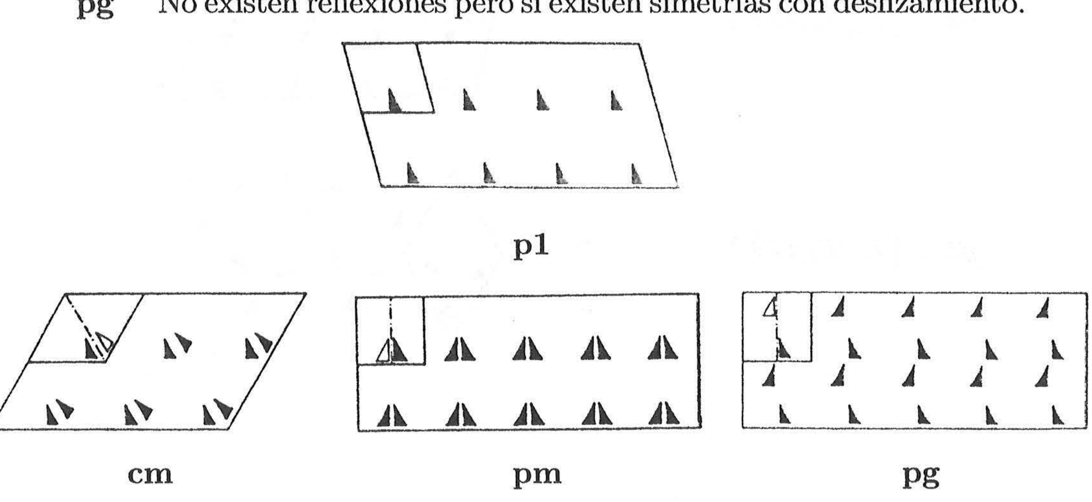
- La característica principal de los grupos que se obtienen a partir de **p1** es que no contienen rotaciones. Al añadir reflexiones y simetrías con deslizamiento, se consiguen los grupos *cm*, *pm*, *pg*.

p1 Las únicas isometrías son las traslaciones.

cm Hay reflexiones y además simetrías con deslizamiento cuyos ejes son paralelos y distintos a los de reflexión.

pm Existen reflexiones pero no hay simetrías con deslizamiento con ejes diferentes de los ejes de las reflexiones.

pg No existen reflexiones pero sí existen simetrías con deslizamiento.



- Los grupos de periodo 2, que se obtienen a partir de **p2** añadiendo reflexiones y simetrías con deslizamiento, son los siguientes:

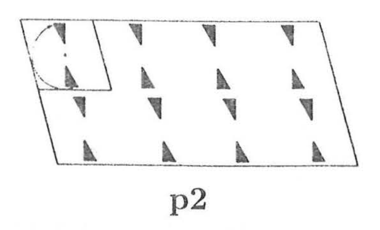
p2 No hay reflexiones ni simetrías con deslizamiento, sólo existen giros de amplitud 180^0.

cmm Hay reflexiones cuyos ejes pasan por centros de rotación y centros de rotación por los que no pasa ningún eje de reflexión.

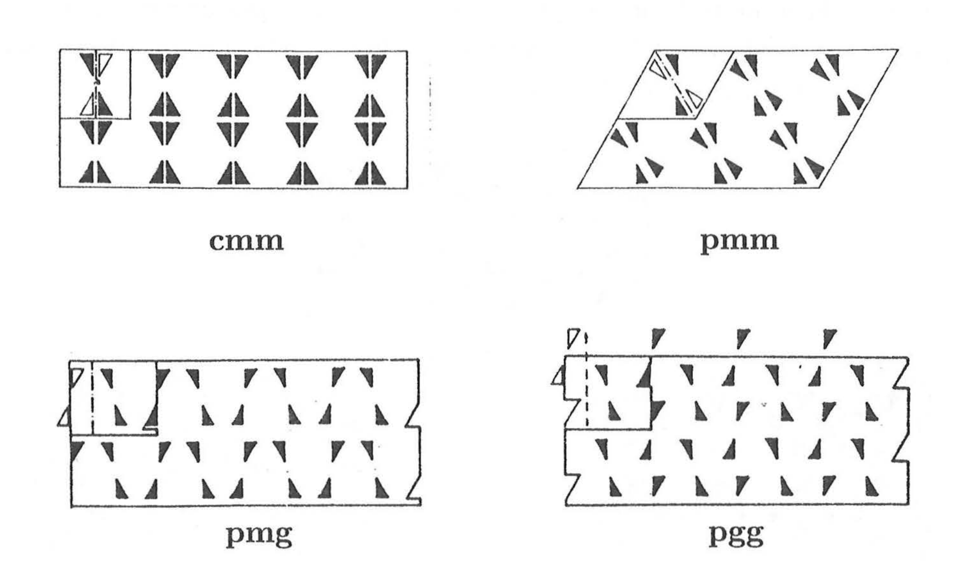
pmm Por todos los centros de las rotaciones de 180^0 pasan ejes de reflexión (hay reflexiones con ejes perpendiculares que se cortan en los centros de rotación).

pmg Los ejes de reflexión no pasan por los centros de rotación (Todas las reflexiones tienen los ejes de reflexión paralelos y existen simetrías con deslizamiento cuyos ejes son perpendiculares a los ejes de las reflexiones).

pgg No hay reflexiones, pero sí simetrías con deslizamiento de ejes perpendiculares entre sí.



p2



cmm pmm

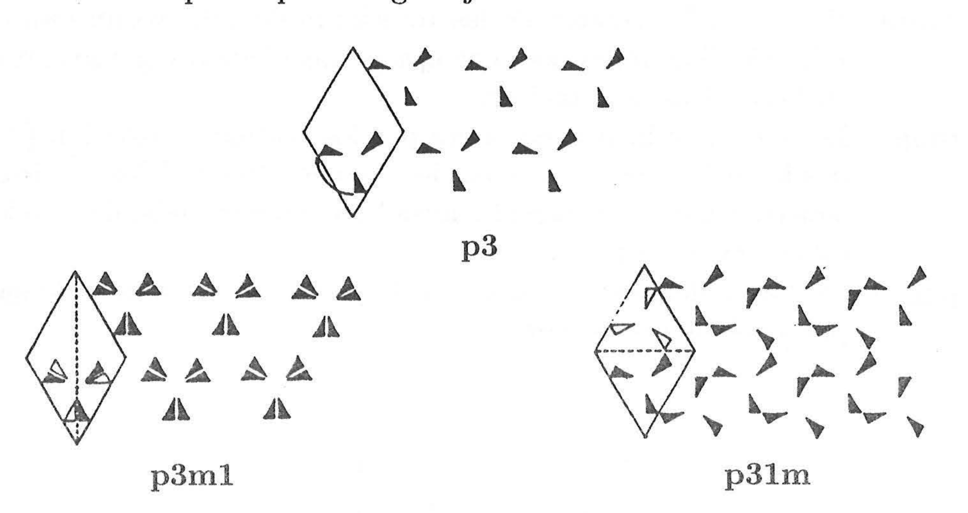
pmg pgg

- Ampliando $p3$ con simetrías y deslizamientos obtenemos los grupos: **p3m1, p31m**.

p3 No hay reflexiones, sólo giros de amplitud 120°.

p3m1 Por todos los centros de las rotaciones de 120° pasan ejes de reflexión.

p31m Existen reflexiones, pero hay centros de rotación de 120° por los que no pasa ningún eje de reflexión.



p3

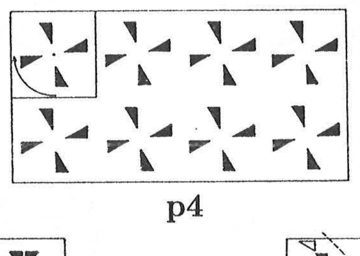
p3m1 p31m

- La ampliación de p4 (grupo de periodo 4) con simetrías y deslizamientos da lugar a : **p4m, p4g**

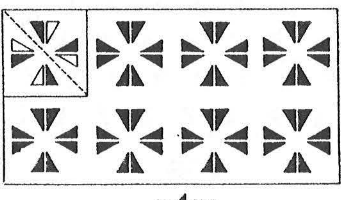
p4 No hay reflexiones, sólo existen rotaciones de 90°.

p4m Hay reflexiones cuyos ejes pasan por los centros de rotación.

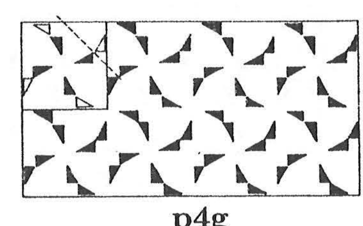
p4g Existen reflexiones, pero sus ejes no pasan por centros de rotación y existen simetrías con deslizamiento cuyos ejes no son paralelos a ningún eje de reflexión.



p4



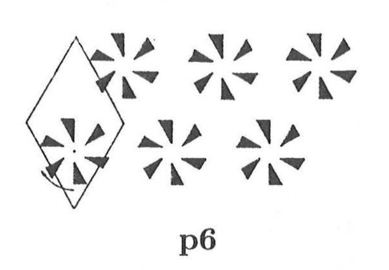
p4m



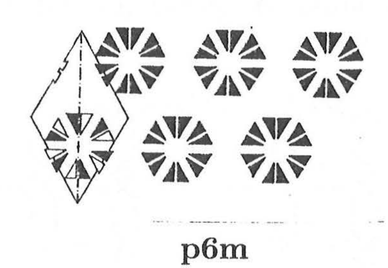
p4g

- Ampliando **p6** con reflexiones resulta **p6m**.

p6	No hay reflexiones, y las rotaciones son de 60^o.
p6m	Existen reflexiones.



p6



p6m

Teorema

Sólo existen 17 grupos de simetría del plano, 5 de ellos contienen isometrías que conservan la orientación y en los 12 restantes aparecen reflexiones y simetrías con deslizamiento.

Si se utilizan dos colores, se encuentran 80 tipos de grupos de simetría plana.

Observación:

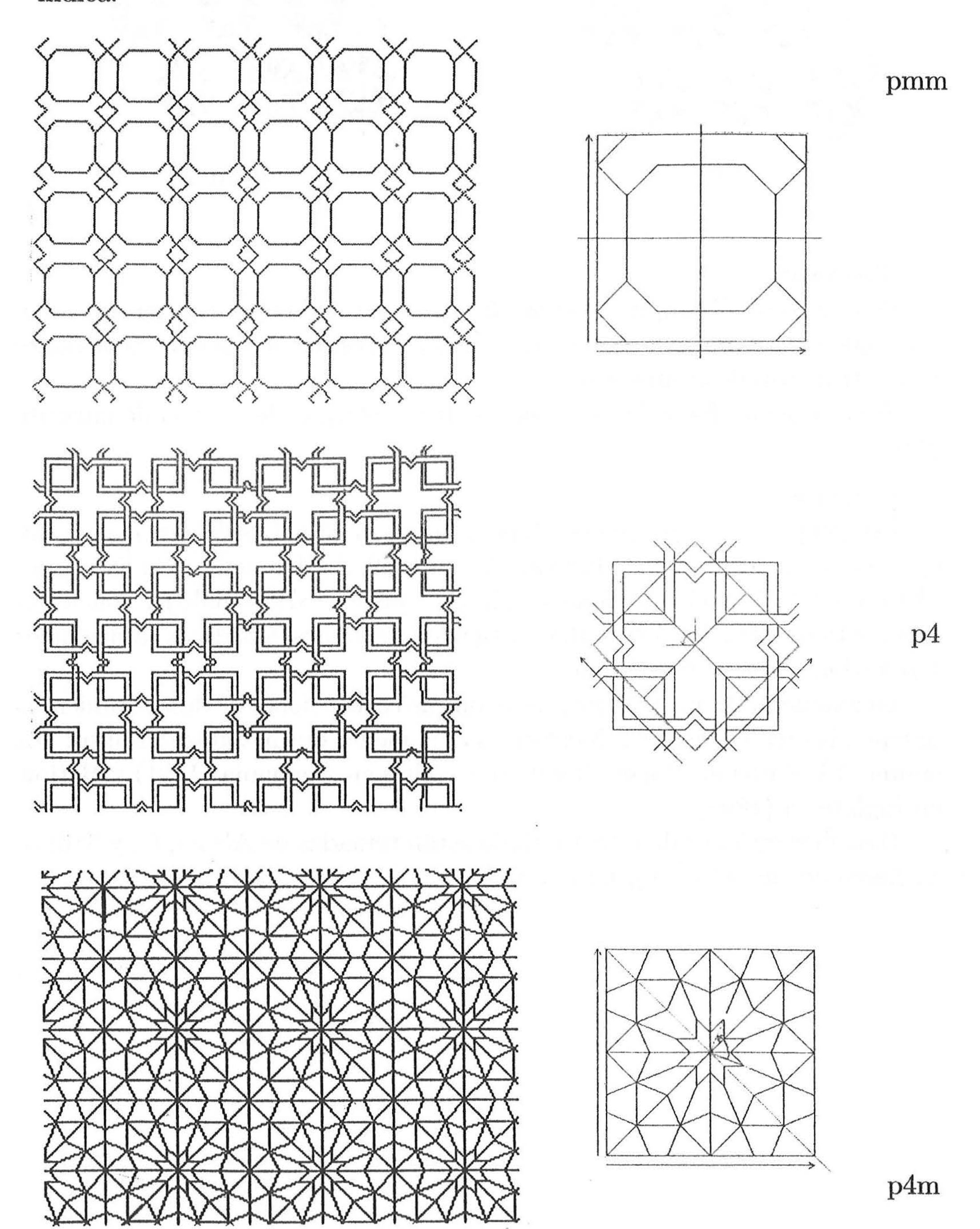
Los grupos análogos en tres dimensiones son 230. Los 65 primeros están compuestos por isometrías directas. Ya en 1869, Jordan elaboró la lista completa, aunque se suelen atribuir a Sohncke, que en 1879, señaló su aplicación a la cristalografía. Los otros 165 contienen reflexiones, simetrías rotacionales y reflexiones con deslizamiento.

La enumeración de estos grupos es un caso excepcional de descubrimientos independientes en lugares diferentes y por medio de métodos distintos: los enumeró Fedorov en Rusia (1890), Schoenflies en Alemania (1891) y Barlow en Inglaterra (1894).

(Las ilustraciones de este apartado están tomadas de Alsina, C. y Trillas, E. *Lecciones de Algebra y Geometría*).

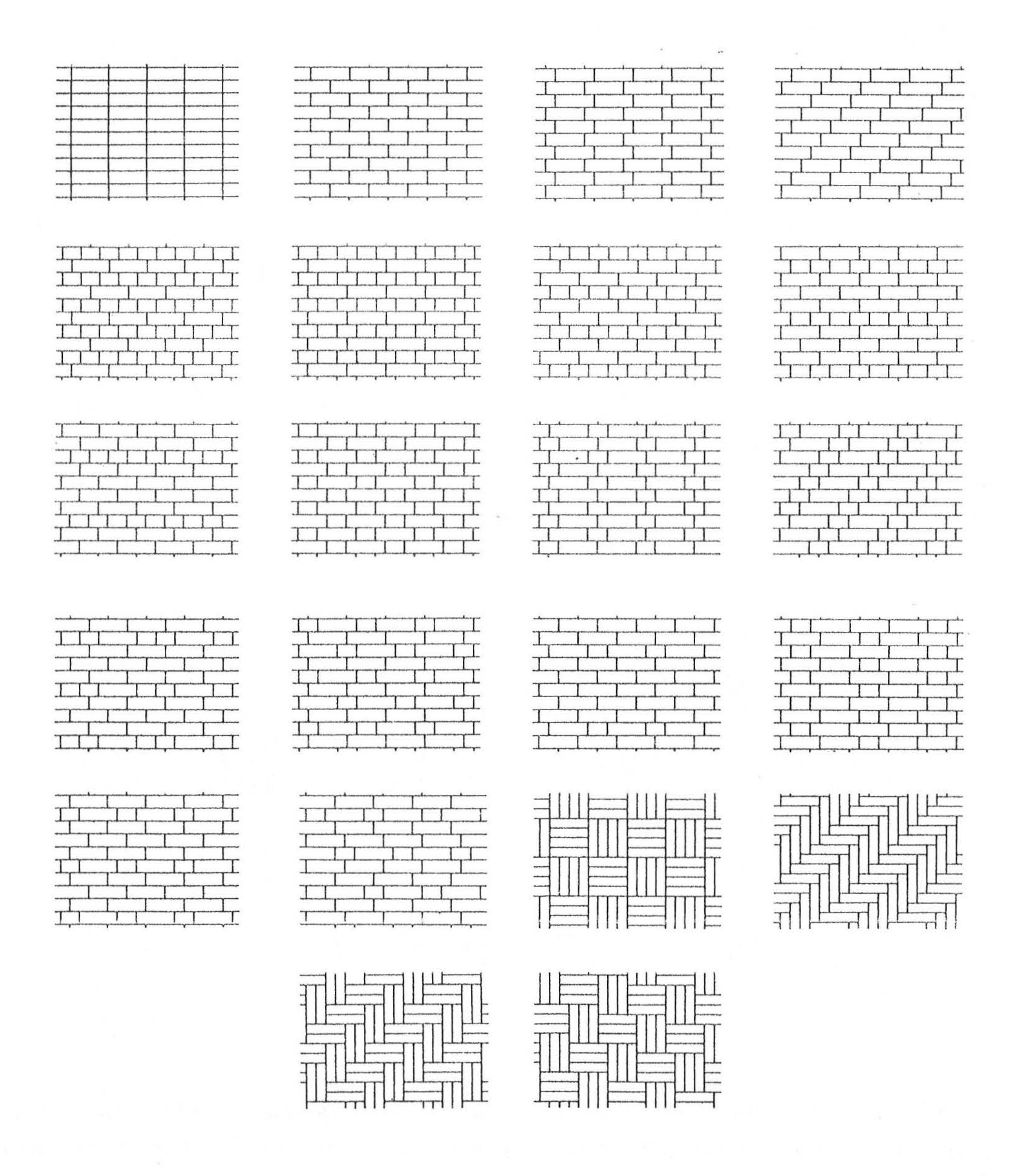
3.6 *Actividades.*

1.- Comprobar que el grupo de simetría de las siguientes figuras es el que se indica.



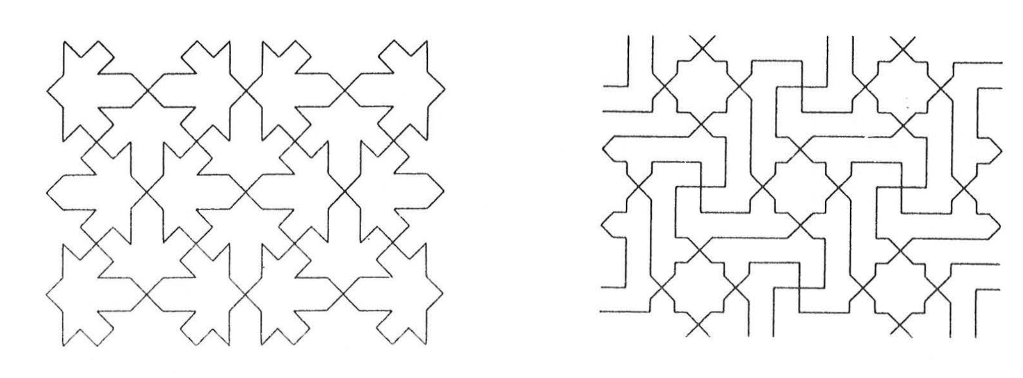
Estas ilustraciones han sido obtenidas con el programa informático MOS1 MOS2 de E.Roanes L. y E.Roanes M.

2.- Estudiar los grupos de simetría de los siguientes diseños obtenidos con ladrillos estándar: rectángulos tales que uno de sus lados es el doble del otro. ¡Se pueden obtener gran variedad de mosaicos con simples ladrillos! Si se emplean distintos colores y texturas, el número de posibilidades aumenta considerablemente.

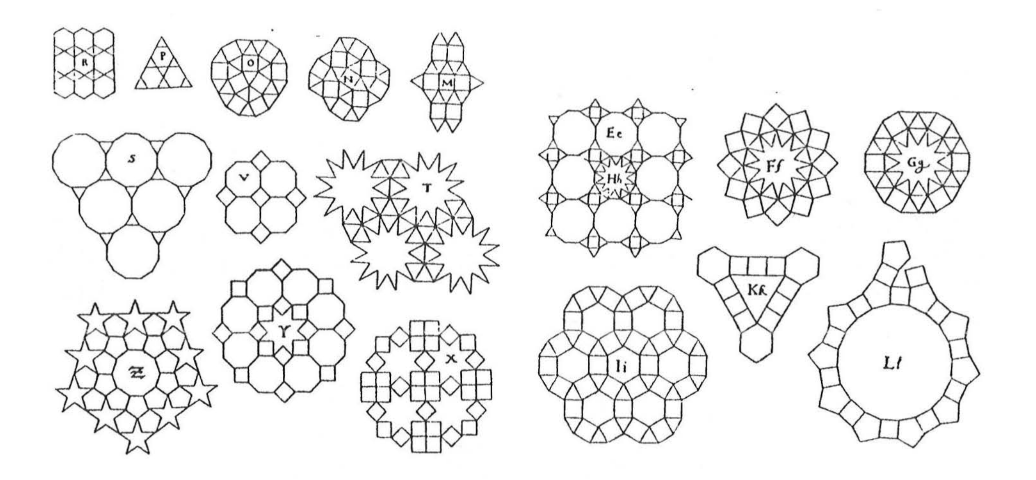


3.7 *Teoría de mosaicos.*

Un mosaico es un recubrimiento especial del plano, que se genera con la repetición, en dos direcciones distintas, de un módulo que cumple ciertas características de acoplamiento y regularidad. Los mosaicos suelen estar fabricados en piedra, cerámica, yeso... y las piezas que los componen encajan, sin huecos, recubriendo el plano u otra superficie.



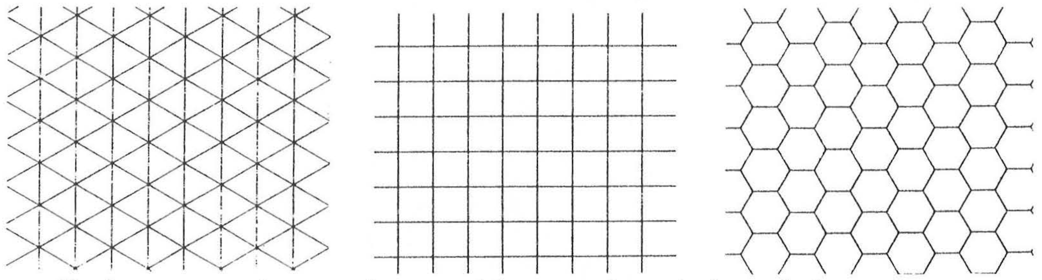
Kepler (1571-1630) fue el primero, probablemente, en investigar las posibles maneras de llenar el plano con polígonos regulares. Sus trabajos fueron olvidados durante mucho tiempo. Las siguientes figuras aparecen en su libro *Harmonice Mundi* publicado en 1619.



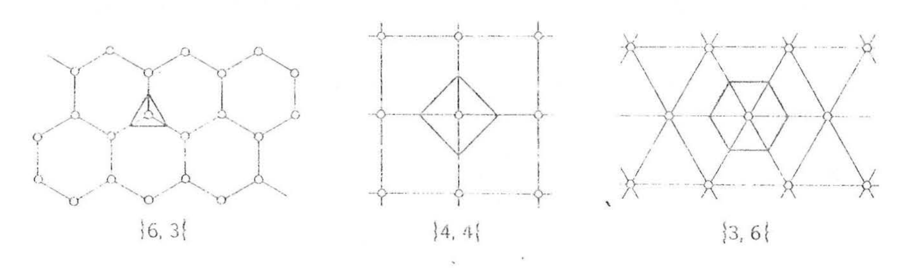
Grünbaum y Shephard en *Tilings and Patterns* nos manifiestan que poseen un panfleto sobre mosaicos impreso en Alemania durante la Segunda Guerra mundial, clasificado ¡Top Secret!.

3.7.1 *Mosaicos regulares.*

Los mosaicos regulares son geométricamente los más sencillos. Están formados por polígonos convexos iguales y regulares.



Dado un mosaico regular consideramos los vértices de los polígonos que lo forman. En el par $\{p, q\}$, p representa el número de lados de los polígonos regulares que rodean a cada vértice y q es el número de dichos polígonos.



El par $\{6, 3\}$ significa que hay 3 polígonos de 6 lados, hexágonos que rodean cada vértice. Igualmente, $\{4, 4\}$ significa que hay 4 polígonos de 4 lados que confluyen en un vértice. Y el par $\{3, 6\}$ informa que hay 6 triángulos en un vértice.

- Para obtener p y q, igualamos el ángulo de un polígono de p lados, que es $((1 - \frac{2}{p})\pi)$, con el valor que ha de tener cuando hay q polígonos reunidos en un vértice:

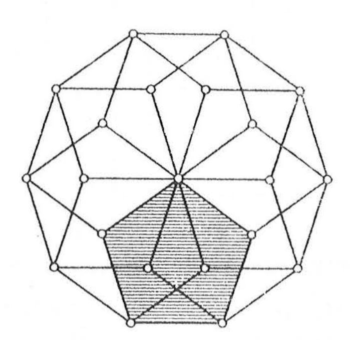
$$(1 - \frac{2}{p})\pi = \frac{2\pi}{q} \Rightarrow (p-2)(q-2) = 4$$

obteniéndose las únicas soluciones enteras:

p	q
3	6
4	4
6	3

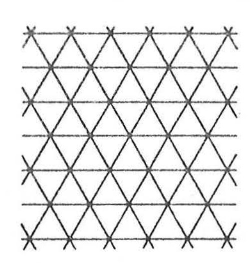
Hay que notar que las soluciones fraccionarias darían lugar a polígonos estrellados.

Por tanto, el plano sólo puede rellenarse con estos polígonos regulares, ya que necesitamos que los ángulos que confluyen en cada vértice sumen 360^o. Si eligiésemos pentágonos, con un número finito de ellos convergiendo en un punto cubriríamos el plano, pero con solapamiento.

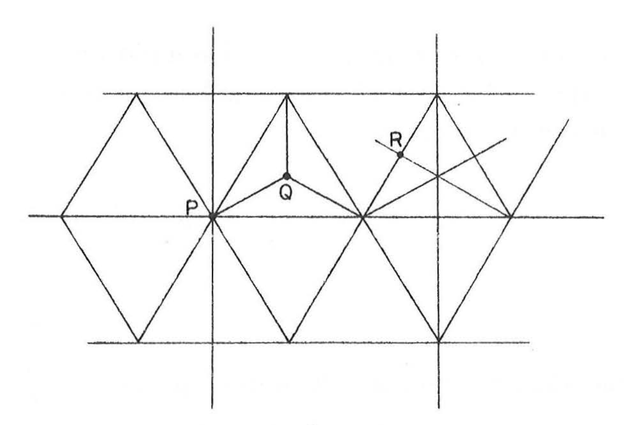


Vamos a analizar un mosaico regular con el fin de encontrar su grupo de simetría.

Tomemos el mosaico formado por triángulos equiláteros:



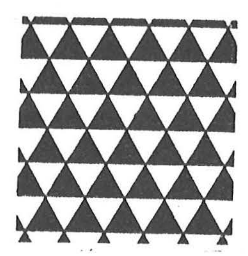
Si centramos nuestra atención en esta región ampliada del mosaico



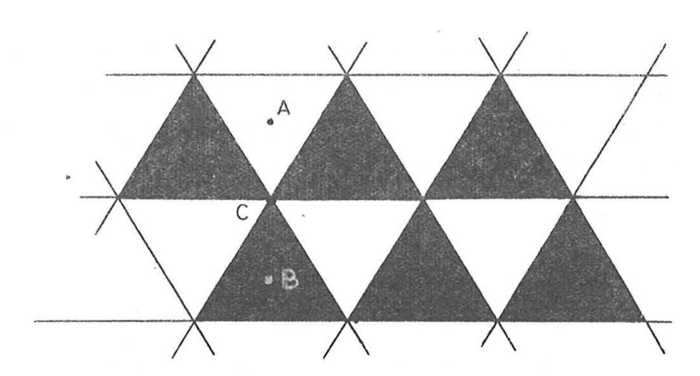
observamos: giros de amplitud $\frac{\pi}{3}$,$\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$ y reflexiones con ejes que pasan por los centros de rotación. Podemos verificarlo tomando como centro P para el giro de ángulo $\frac{\pi}{3}$, Q para $\frac{2\pi}{3}$ y R para $\frac{\pi}{2}$.

Este conjunto de isometrías corresponde al grupo de simetría $p6m$.

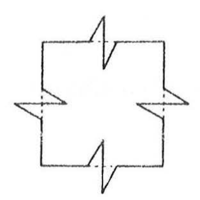
Si coloreamos el mosaico

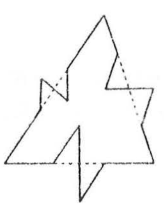


el resultado es una nueva figura con un grupo de simetría distinto en la que aparecen giros de ángulo $\frac{2\pi}{3}$ y reflexiones que pasan por los centros de giro. Se puede comprobar tomando como centros de giro A, B y C, y como eje de reflexión la recta que pasa por esos tres puntos. El grupo de simetría correspondiente a este mosaico es $p3m1$.



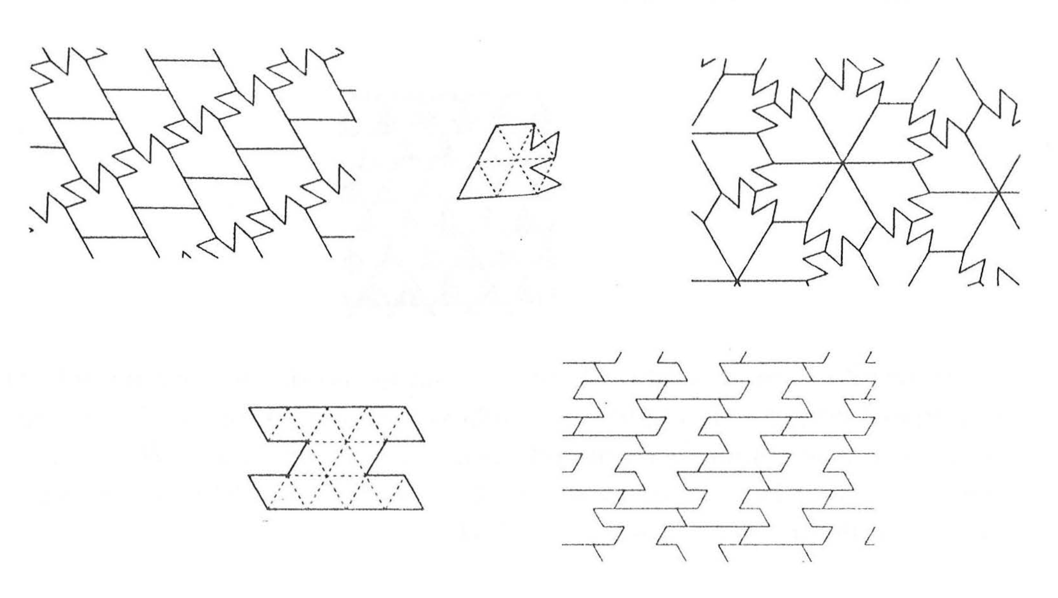
En muchas ocasiones los motivos de los mosaicos se obtienen a partir de un polígono regular, como muestran estos ejemplos:



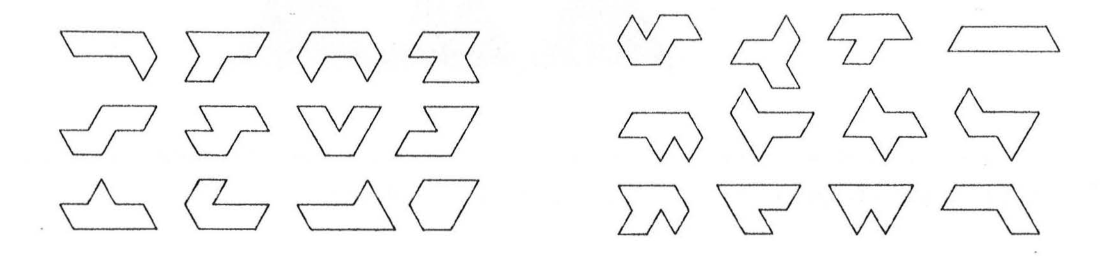


En ellos, la parte recortada en el interior del polígono se añade sobre uno de sus lados.

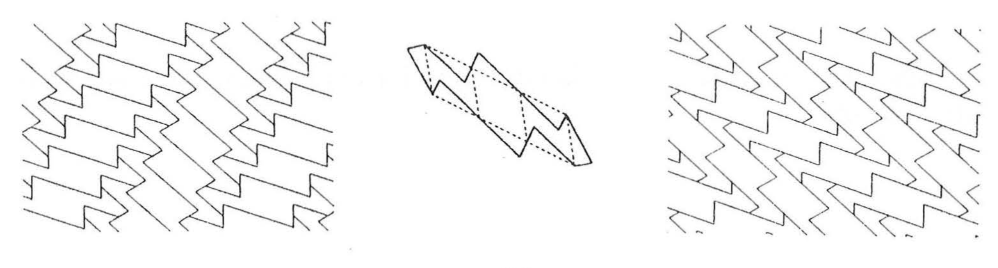
En otros casos para conseguir el motivo del mosaico lo que se realiza es un agrupamiento de polígonos regulares.



Cada una de las 24 figuras siguientes está formada por la unión de siete triángulos equiláteros. O'Beirne propuso el problema de recubrir el plano con cada una de ellas. Bishop demostró que es posible en todos los casos salvo en uno. ¿Sabría decir en cuál?.



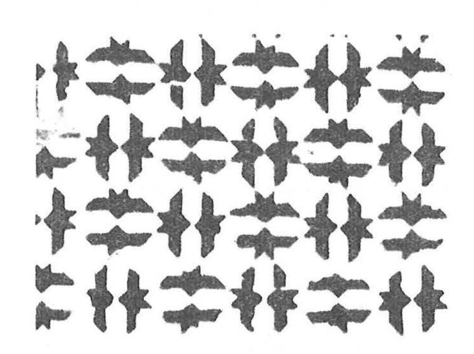
La deformación de polígonos regulares es otra técnica que se utiliza en la elaboración de mosaicos.

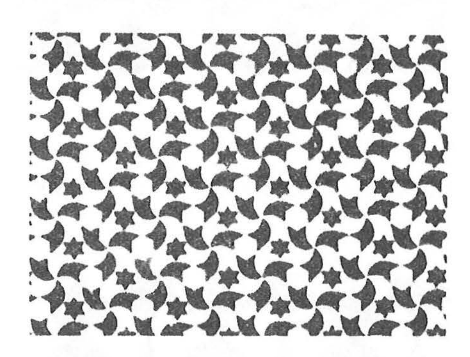


3.7.2 *Arabescos de la Alhambra de Granada.*

En la historia de las Matemáticas los árabes ocupan un lugar destacado por sus aportaciones en el terreno de la Geometría, la Aritmética y la Astronomía. Gracias a ellos conocemos la mayoría de las obras de los griegos ya que trajeron a Europa los manuscritos traducidos de la Geometría Euclídea. Desde un punto de vista estético nos han dejado una importante herencia que culmina en los mosaicos de la Alhambra, auténticas joyas geométricas que hacen de este conjunto artístico el máximo exponente del arte nazarí.

Este monumento, el más famoso islámico medieval, es un conjunto de edificios construido como acrópolis y ciudad de la corte de la dinastía nazarí (siglos XIII y XIV) que contiene exquisitas estancias y bellos jardines. Sus paredes, con yeserías interrumpidas por hileras de ventanas, tienen zócalos alicatados cerámicos e inscripciones ornamentales que hacen de la Alhambra la expresión más hermosa del arte geométrico.



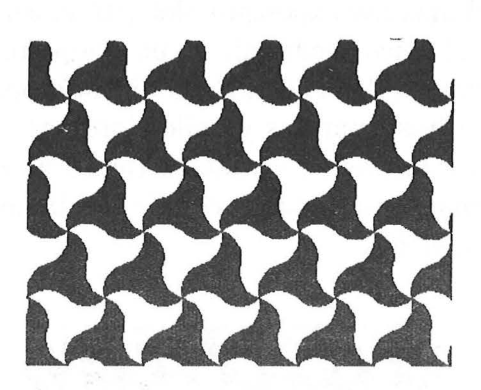


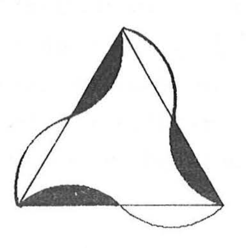
¿A qué se debe esta abundancia de geometría en el arte hispano-musulmán? La razón fundamental es de carácter religioso. En primer lugar, porque el Corán prohibe expresamente cualquier representación icónica de Alá. Y por otra parte, la divinidad se identifica con la singularidad.

Si analizamos los mosaicos de la Alhambra, el efecto visual que producen es que ningún punto es singular ni más importante que los demás. Este efecto se consigue con la utilización de la simetría y el recubrimiento de la superficie de forma regular y armoniosa, obligando a los artesanos musulmanes no sólo a recurrir a la Geometría, sino además a la Geometría Dinámica basada en la composición de movimientos en el plano. El hecho más sorprendente de estas composiciones artísticas es que su estructura geométrica se ajusta a los 17 grupos de simetría del plano; esto revela el profundo conocimiento matemático de los artistas granadinos, y causa gran asombro teniendo en cuenta que la teoría sobre grupos de simetría aparece cuatro siglos más tarde.

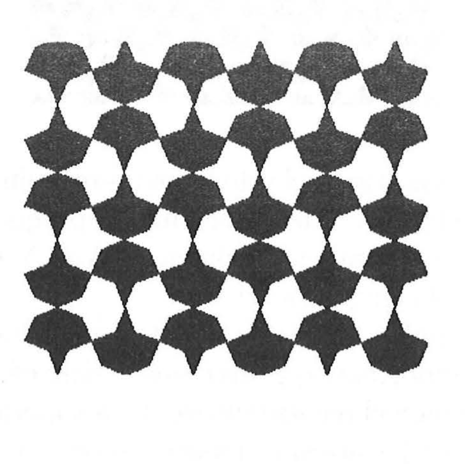
Entre las técnicas que utilizaban para elaborar los motivos de los mosaicos destaca la transformación de polígonos regulares, como es el caso de la pajarita nazarí y el hueso nazarí.

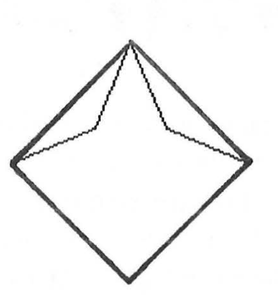
La pajarita se obtiene modificando un triángulo equilátero. Cada parte sombreada en negro se recorta y se añade sobre cada uno de los lados del triángulo.

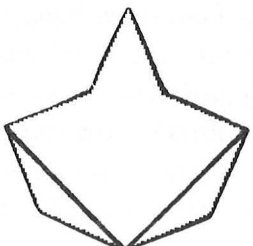


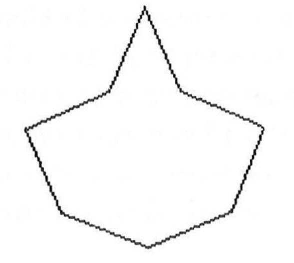


La transformación de un rombo nos da este otro motivo floral



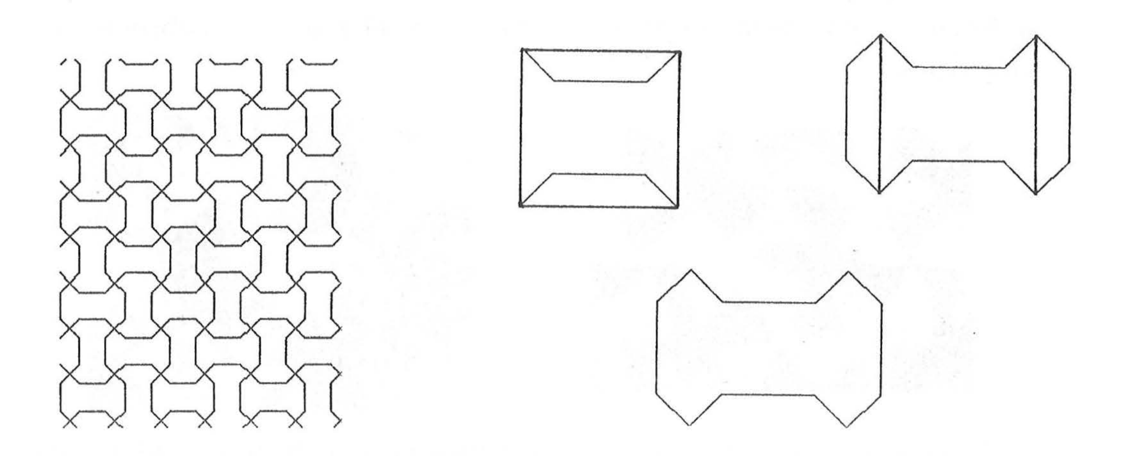




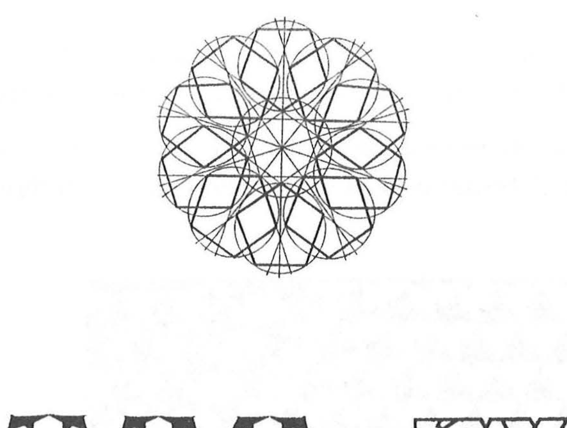


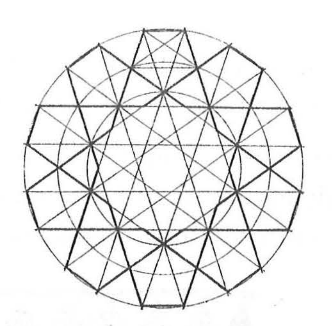


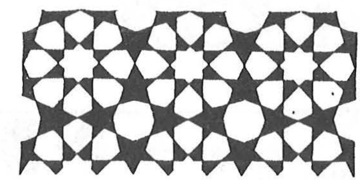
De forma análoga, a partir de un cuadrado resulta el hueso nazarí:

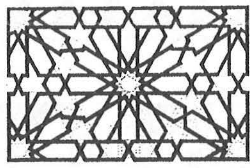


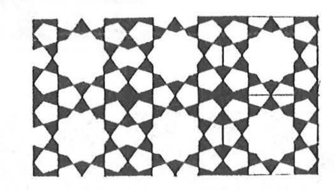
Otro de los recursos geométricos empleados para diseñar los motivos de un mosaico consistía en girar un polígono regular en torno a un punto fijo, produciéndose un solapamiento de figuras que da lugar a un polígono estrellado.





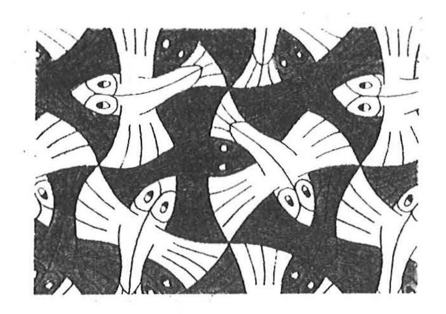


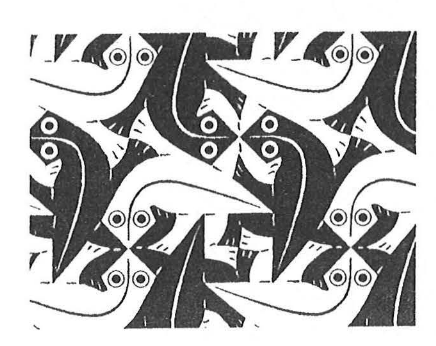




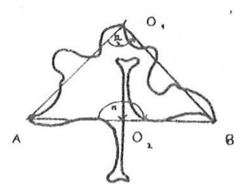
3.7.3 *Mosaicos de Escher*

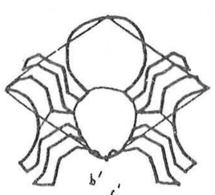
La Alhambra ha inspirado a muchos artistas a lo largo de los siglos, entre ellos se encuentra el holandés M.C. Escher (1898-1972). Su visita a este conjunto artístico en 1944, le sirvió para introducirse en el arte del recubrimiento de superficies.





Al igual que los artistas nazaríes, transforma polígonos regulares para obtener los elementos generadores de sus mosaicos, como vemos en estos ejemplos

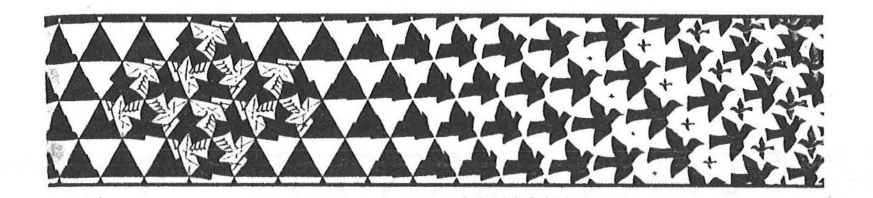


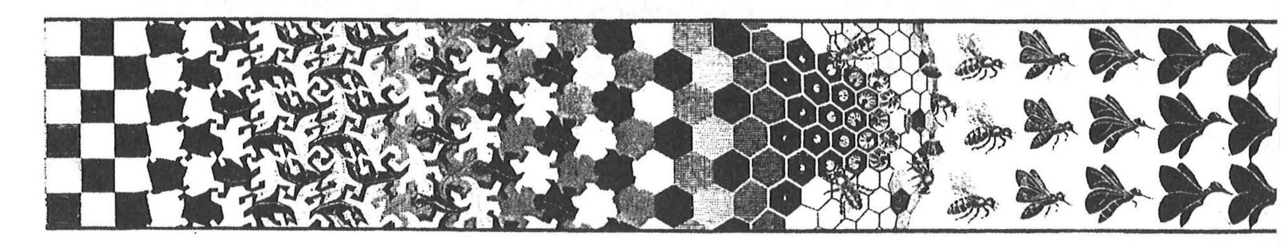




En ellos podemos comprobar que toda parte recortada dentro del polígono, se pega fuera del polígono después de haberle aplicado una isometría.

Son muy populares los mosaicos llamados metamorfosis, en los cuales partiendo de una forma inicial indeterminada se va transformando en figuras de contornos bien definidos.





4 *BIBLIOGRAFÍA BÁSICA.*

- Alsina, C. y Trillas, E. *Lecciones de Algebra y Geometría*, Editorial Gustavo Gili, S.A., Barcelona, 1984.
- Benévolo, L. *Introducción a la arquitectura*, Celeste Ediciones, Madrid, 1992.
- Costa, A. *Arabescos y Geometría*, (vídeo), CEMAV. Vicerrectorado de Metodología, Medios y Tecnología. UNED, 1995.[3]
- Ernst, B. *El espejo mágico de M.C. Escher*, Editorial Taschen, Germany, 1994.
- Grünbaum, Branko y Shephard, G.C. *Tilings and Patterns*, Freeman and Company, New York, 1989.
- Roanes Macías, E. y Roanes Lorenzo, E. *Nuevas tecnologías en Geometría*, Editorial Complutense, Madrid, 1994.[4]
- Wilson, E. *Diseños islámicos*, Editorial Gustavo Gili, México, 1998.

[3]Este vídeo obtuvo el Primer Premio en el área científico-técnica en la Bienal de Cine y Vídeo Científico Español (Zaragoza, diciembre 1997).

[4]Los profesores Roanes M. y Roanes L. en "Nuevas tecnologías en Geometría" incluyen la simulación de frisos y teselaciones del plano. Los programas MOS1.EXE Y MOS2.EXE permiten elegir entre los 17 grupos de simetría. Una vez elegido el motivo del mosaico y el número de células por línea, se analiza su dominio fundamental, los ejes de reflexión, rotaciones, deslizamientos y la célula reticular.

Índice General

NOTAS

NOTAS

CUADERNO

40.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN

http://www.aq.upm.es/of/jherrera
jherrera@aq.upm.es

